Por que aprender Funções Trigonométricas?

É importante saber sobre Funções Trigonométricas, pois estes conhecimentos vão além da matemática.

Você encontra a utilidade das funções seno, cosseno e tangente na eletricidade, na acústica e na música, por exemplo.

Onde usar os conhecimentos sobre Funções Trigonométricas?

Dedilhar as cordas de um violão nada mais é do que fazer vibrar as cordas, pressionando o ar e gerando as ondas sonoras, as quais podem ser bem traduzidas nos gráficos das funções trigonométricas, por exemplo.

Capítulo 1

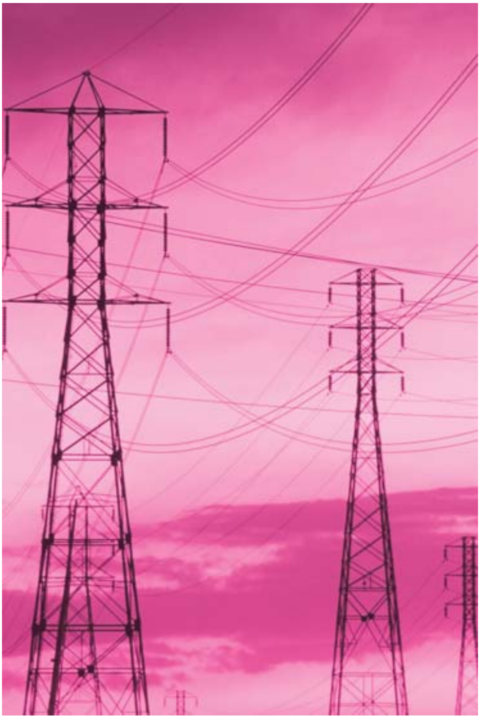
INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA

Trigonometria é o ramo da Matemática que vem do (grego *trigono* = triangular e *metria* = medida).

Ela estabelece relações entre medidas de ângulos e segmentos.

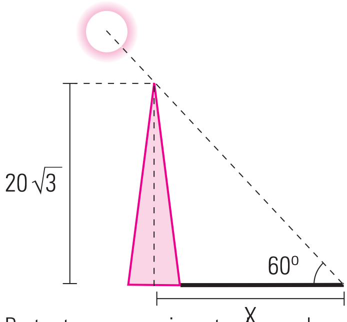
Seu objetivo é o cálculo das medidas dos lados de um triângulo ou de seus ângulos.

Na atualidade, a trigonometria não se limita ao estudo de triângulos. Estende-se a outros ramos como Eletricidade, Engenharia, Acústica, Astronomia etc.



Há problemas que envolvem aplicações das razões trigonométricas, como, por exemplo:

Determine o comprimento da sombra projetada por uma torre com $20\sqrt{3}$ m de largura, sob ângulo de elevação do sol de 60º.



Solução:

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{x}$$

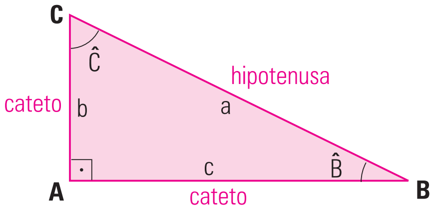
$$\sqrt{3}\,x = 20\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{20\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}}$$

$$x = 20 \text{ m}$$

Portanto, o comprimento da sombra projetada é 20 m.

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Considerando o triângulo retângulo da figura:



$$\text{sen } \hat{B} = \frac{a}{b} \qquad \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \qquad \cos \hat{C} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} \qquad \text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b}$$

Seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

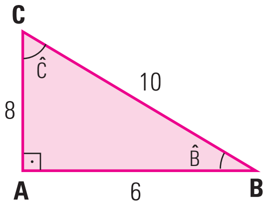
Cosseno de um ângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Tangente de um ângulo é a razão do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente.

Exemplos:

No triângulo ABC, determine o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos.

a)

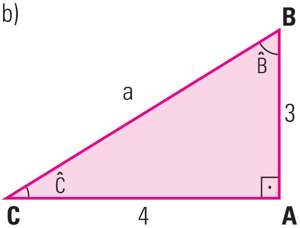


$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \cos \hat{C} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

b)



Nesse caso, devemos calcular a medida **a** da hipotenusa aplicando o teorema de Pitágoras.

Saiba mais

Podemos estabelecer relações entre as medidas dos ângulos e as medidas dos lados de um triângulo.

Assim, podemos aplicar a trigonometria na construção de viadutos e pontes, na navegação, no levantamento topográfico de terrenos etc.

Lembrando:

Teorema de Pitágoras define-se como o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Solução:

$a^2 = 4^2 + 3^2$

$a^2 = 16 + 9$

$a^2 = 25$

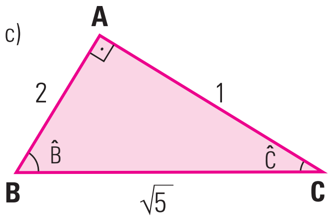
$a = 5$

$\text{sen } \hat{B} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\text{sen } \hat{C} = \frac{3}{5}$

$\cos \hat{B} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\cos \hat{C} = \frac{4}{5}$

$\text{tg } \hat{B} = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\text{tg } \hat{C} = \frac{3}{4}$

c)



$\text{seno } \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\qquad$ $\text{seno } \hat{C} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos \hat{B} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\qquad$ $\cos \hat{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg } \hat{B} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\text{tg } \hat{C} = \frac{2}{1} = 2$

Valores Notáveis

Há alguns ângulos que merecem importância maior, por isso são chamados ângulos notáveis (30^o, 45^o e 60^o).

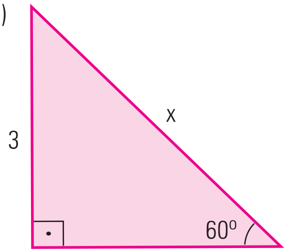
Assim, podemos construir a seguinte tabela:

	30^o	45^o	60^o
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplos:

1) Com auxílio da tabela, calcule o valor de x nos triângulos retângulos abaixo:

a)



Solução:

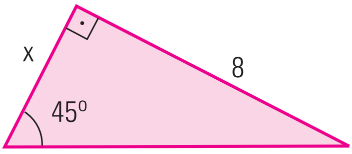
$$\text{sen } 60^o = \frac{3}{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{x} \Rightarrow \sqrt{3}\,x = 6$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

b)

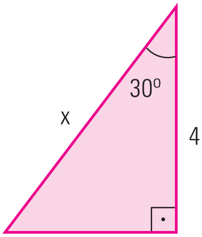


Solução:

$$\text{tg } 45^o = \frac{8}{x}$$

$$1 = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 8$$

c)



Solução:

$$\cos 30^\circ = \frac{4}{x}$$

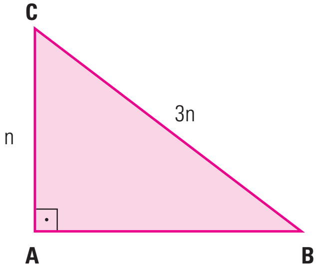
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow \sqrt{3}\,x = 8$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

2) Sabendo que o cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo medem n e 3n, respectivamente, calcule a tangente do ângulo oposto ao menor lado.

Solução:



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(3n)^2 = n^2 + \left(\overline{AB}\right)^2$$

$$9n^2 = n^2 + \left(\overline{AB}\right)^2$$

$$\left(\overline{AB}\right)^2 = 8n^2$$

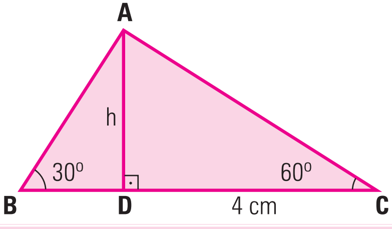
$$\left(\overline{AB}\right) = \sqrt{8n^2}$$

$$\left(\overline{AB}\right) = 2\sqrt{2}\,n$$

O menor cateto é $\overline{AC}$.

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{\cancel{n}}{2\sqrt{2}\,\cancel{n}} \Rightarrow \operatorname{tg}\hat{B} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

3) Sendo $\overline{DC} = 4$ cm, determine $\overline{AB}$:



Solução:

No triângulo ACD, temos:

$$\text{tg } 60^o = \frac{h}{4}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$$

No triângulo ABD, temos:

$$\text{sen } 30^o = \frac{h}{\overline{AB}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = 8\sqrt{3}\text{ cm}$$

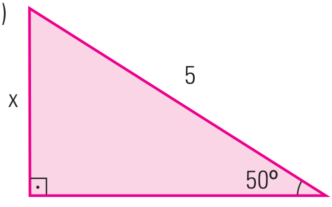
Obs.:

Se o ângulo não for notável, devemos consultar a tabela com valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos expressos em graus.

Exemplo:

Com auxílio da tabela, calcule o valor de x nos triângulos retângulos abaixo.

a)



Solução:

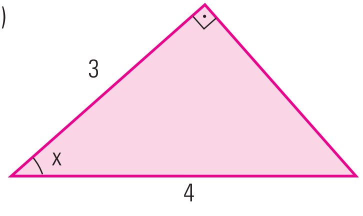
$$\text{sen } 50^o = \frac{x}{5}$$

$$0{,}766 = \frac{x}{5}$$

$$x = 5 \cdot 0{,}766$$

$$x = 3{,}83$$

b)



Solução:

$$\cos x = \frac{3}{4}$$

$$\cos x = 0{,}75$$

$$x \cong 41^o$$

Tabela de Razões Trigonométricas de Ângulos Agudos

Graus	Sen	Cos	Tg	Cotg	
1º	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89º
2º	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88º
3º	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	87º
4º	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	86º
5º	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85º
6º	0,1045	0,9945	0,1051	9,5143	84º
7º	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83º
8º	0,1392	0,9903	0,1405	7,1153	82º
9º	0,1564	0,9877	0,1584	6,3137	81º
10º	0,1736	0,9848	0,1763	5,6712	80º
11º	0,1908	0,9816	0,1944	5,1445	79º
12º	0,2097	0,9781	0,2126	4,7046	78º
13º	0,2250	0,9744	0,2309	4,3314	77º
14º	0,2419	0,9703	0,2493	4,0107	76º
15º	0,2588	0,9659	0,2679	3,7320	75º
16º	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74º
17º	0,2924	0,9563	0,3057	3,2708	73º
18º	0,3090	0,9511	0,3249	3,0776	72º
19º	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71º
20º	0,3420	0,9397	0,3640	2,7474	70º
21º	0,3584	0,9336	0,3839	2,6050	69º
22º	0,3746	0,9272	0,4040	2,4750	68º
23º	0,3907	0,9205	0,4245	2,3558	67º
24º	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66º
25º	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65º
26º	0,4384	0,8988	0,4877	2,0530	64º
27º	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63º
28º	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62º
29º	0,4848	0,8746	0,5543	1,8045	61º
30º	0,5000	0,8660	0,5774	1,7320	60º
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Graus

Graus	Sen	Cos	Tg	Cotg	
31º	0,5150	0,8572	0,6009	1,6642	59º
32º	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58º
33º	0,5446	0,8387	0,6494	1,5398	57º
34º	0,5592	0,8290	0,6745	1,4825	56º
35º	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55º
36º	0,5878	0,8090	0,7265	1,3763	54º
37º	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53º
38º	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52º
39º	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51º
40º	0,6428	0,7660	0,8391	1,1917	50º
41º	0,6561	0,7547	0,8693	1,1503	49º
42º	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48º
43º	0,6820	0,7314	0,9325	1,0723	47º
44º	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46º
45º	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45º
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Graus

Saiba mais

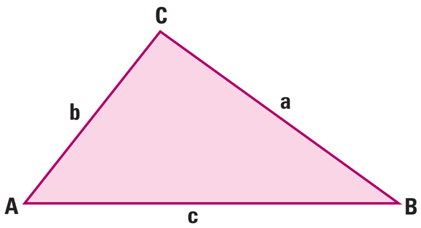
USANDO A TRIGONOMETRIA NO TRABALHO

Na construção do telhado de uma casa, os pedreiros costumam usar a linguagem "caimento" do telhado.

Imagine uma casa com um telhado com 30% de inclinação. Dizemos que a tangente do ângulo que as telhas fazem com a horizontal é 0,3. O triângulo formado pode ser medido por meio das relações trigonométricas.

Relações Trigonométricas num Triângulo Qualquer

Considere o triângulo abaixo:



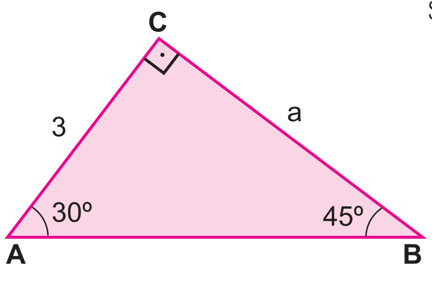
Em todo triângulo, as medidas dos seus lados são proporcionais aos senos dos lados opostos.

Com a definição acima, obtemos a **lei dos senos**, em que:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2r$$

Exemplos:

1) No triângulo abaixo, calcule $\overline{BC}$:



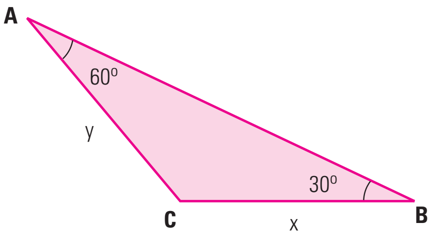
Solução:

$$\frac{a}{\text{sen } 30^o} = \frac{3}{\text{sen } 45^o}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\, a = \frac{3}{\cancel{2}}$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

2) Num triângulo ABC, $\overline{BC} = x$, $\overline{AC} = y$, $\hat{A} = 60^o$ e $\hat{B} = 30^o$, calcule x e y, onde $x + y = 3$.



Solução:

$$\frac{x}{\text{sen } 60^{\circ}} = \frac{y}{\text{sen } 30^{\circ}}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\,x = \frac{\sqrt{3}\,y}{\cancel{2}} \Rightarrow x = \sqrt{3}\,y$$

Substituindo $x = \sqrt{3}\,y$ em $x + y = 3$, temos:

$$x + y = 3$$

$$\sqrt{3}\,y + y = 3 \Rightarrow y(\sqrt{3} + 1) = 3$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow y = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$y = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{3\sqrt{3} - 3}{2}$$

Lei dos Cossenos

Em todo triângulo, o quadrado de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, subtraído do dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo correspondente.

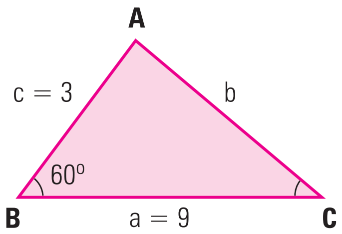
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \, . \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \, . \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \, . \cos \hat{C}$$

Exemplos:

1) Determine a medida do lado AC do triângulo.



Solução:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\hat{B}$$

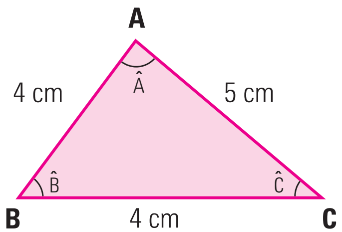
$$b^2 = 9^2 + 3^2 - 2 \cdot 9 \cdot 3\,\frac{1}{2}$$

$$b^2 = 81 + 9 - 27$$

$$b^2 = 63$$

$$b = 3\sqrt{7}$$

2) Num triângulo ABC, tem-se AB = 4 cm, AC = 5 cm e $\hat{B} = A\hat{B}C$. Se BC = 4 cm, calcule cos $\hat{A}$.



Solução:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\hat{A}$$

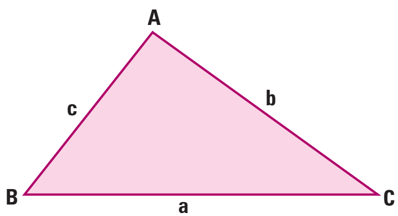
$$4^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos\hat{A}$$

$$\cancel{16} = 25 + \cancel{16} - 40\cos\hat{A}$$

$$40\cos\hat{A} = 25$$

$$\cos\hat{A} = \frac{25}{40} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{5}{8}$$

Área de um Triângulo

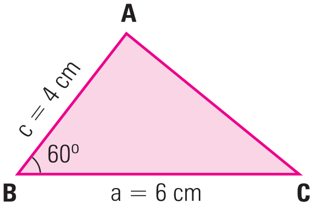


A área de um triângulo qualquer pode ser definida por:

$$A = \frac{a \cdot b \operatorname{sen} \hat{C}}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{a \cdot c \operatorname{sen} \hat{B}}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{b \cdot c \operatorname{sen} \hat{A}}{2}$$

Exemplo:

Determine a área do triângulo ABC.



Solução:

$$A = \frac{a \cdot c \operatorname{sen} \hat{B}}{2}$$

$$A = \frac{6 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

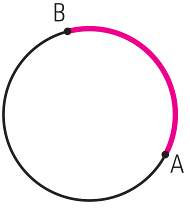
$$A = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Trigonometria na Circunferência

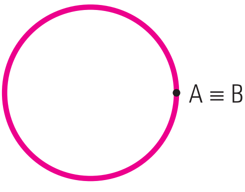
Arcos de Circunferência

Define-se arco de circunferência AB como cada parte em que a circunferência fica dividida.

Indicação: $\overset{\frown}{AB}$



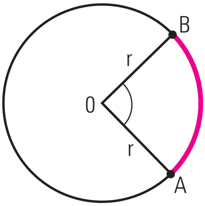
A e B são extremidades e determinam dois arcos.



A e B coincidem, determinando um arco nulo e outro de uma volta.

Ângulo Central

É o ângulo cujo vértice coincide com o centro da circunferência, e os lados são raios dessa circunferência.



Observe que a medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente:

$m(\overset{\frown}{AB}) = m(A\hat{O}B)$

Unidade de Medida de Arcos

Grau (°)

Define-se grau como o arco unitário que corresponde a $\dfrac{1}{360}$ da circunferência. O comprimento de uma circunferência em graus é 360º.

Submúltiplos do grau são: o minuto (') e o segundo (''), onde há a seguinte correspondência.

$1^o = 60'$ $\qquad$ $1' = 60''$ $\qquad$ $1^o = 3600''$

Radiano (rad)

Radiano é um arco unitário, que corresponde à medida do raio da circunferência.

A medida em radianos de uma circunferência completa equivale a 2π rad.

Grado (gr)

Cada arco unitário que corresponde a $\dfrac{1}{400}$ da circunferência definimos como grado.

Relação entre as unidades.

Arco				
grau	90º	180º	270º	360º
radiano	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	2π rad
grado	100 gr	200 gr	300 gr	400 gr

Conversão de Unidades

A conversão de unidades pode ser por meio de uma regra de três simples.

360° — 2π rad ou

180° — π rad

Exemplos:

a) Expresse 120° em radianos.

Solução:

Usando a relação:

180° ———— π rad

120° ———— x

$$180x = 120\pi$$

$$x = \frac{120\pi}{180}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}\text{rad}$$

b) Converta $\frac{3\pi}{4}$rad em graus.

180° ———— π rad

x ———— $\frac{3\pi}{4}$ rad

$$x \cdot \pi = 180^{\circ} \cdot \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{180^{\circ} \cdot \frac{3\pi}{4}}{\pi}$$

$$x = 135^{\circ}$$

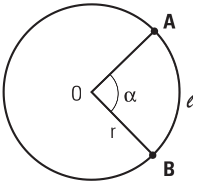
Podemos converter radianos em graus usando uma regra prática.

Assim:

$$\frac{3\pi}{4}\text{rad} = \frac{3 \cdot 180^{\circ}}{4} = 135^{\circ}$$

Comprimento de um Arco

Considere a circunferência da figura. Definimos comprimento de um arco a seguinte relação:



$\alpha = \frac{\ell}{r}$ ou $\ell = \alpha \,.\, r$

α é medido em radianos.

Por exemplo, se o ângulo central $A\hat{O}B$, determine numa circunferência de $r = 4$ cm um arco $\overset{\frown}{AB}$ de medida $\ell = 6$ cm, então a medida de $A\hat{O}B$ será $\alpha = \frac{6}{4} \Rightarrow \alpha = 1{,}5$ rad.

Qual a medida do raio de uma circunferência cujo arco mede π rad e o seu comprimento, 4,15 cm?

$\ell = \alpha \cdot r$ Lembrete: π rad $= 3{,}14$

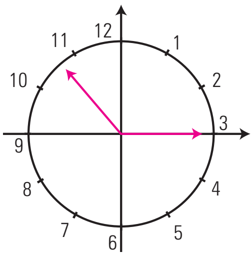
$4{,}15 = 3{,}14\, r$

$3{,}14\, r = 4{,}15$

$r = \frac{4{,}15}{3{,}14}$

$r = 1{,}32$ cm

Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando marca:



Solução:

Relacionando:

minutos	graus
60	30
15	α

$$\frac{60}{15} = \frac{30}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{30 \cdot 15}{60} \Rightarrow \alpha = 7{,}5 \Rightarrow \alpha = 7^{o}\ 30'$$

$$\theta = 120^{o} - \alpha$$

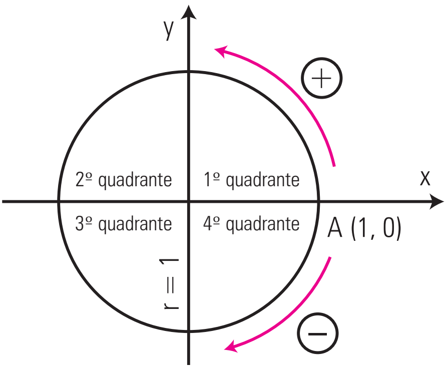
$$\theta = 120^{o} - 7^{o}\ 30'$$

$$\theta = 112^{o}\ 30'$$

Ciclo Trigonométrico

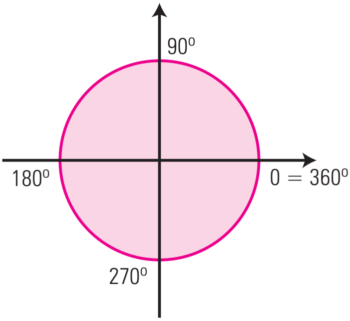
Considerando um plano cartesiano, representamos nele um círculo com centro na origem dos eixos e raios 1.

Dividimos o ciclo trigonométrico em quatro arcos, obtendo quatro quadrantes.

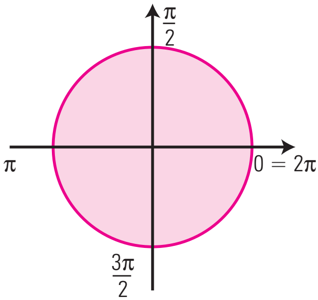


Dessa forma, obtemos as relações:

Em graus:



Em radianos:



Expressão Geral dos Arcos

- Quando medidos em graus, a expressão é obtida por:

  $\alpha = \alpha_0 + 360^\circ \cdot k$, sendo que $k \in \mathbb{Z}$

  α_0 é denominada 1ª determinação positiva ($0 \leq \alpha_0 \leq 360^\circ$)

  k é o número de voltas.

- Quando medidos em radianos, a expressão geral dos arcos é obtida por:

  $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Exemplos:

Determine a 1ª determinação positiva e dê a expressão geral dos arcos:

a) 1630º

Solução:

$$\begin{array}{l|l} 1630^\circ & 360^\circ \\ \hline 190^\circ & 4 \end{array}$$

número de voltas completas

$$1630^\circ = 190^\circ + 4 \cdot 360^\circ$$

190º é a primeira determinação positiva.

b) -2360^{o}

Solução:

$$\begin{array}{l|l} 2360^{o} & 360^{o} \\ \cline{2-2} 200^{o} & 6 \end{array}$$

Para obter a 1ª determinação positiva, devemos fazer

$$360^{o} - 200^{o} = 160^{o}$$

A primeira determinação positiva é 160^{o} e a expressão geral é

$$\alpha = 160^{o} + k \cdot 360^{o}$$

c) $\frac{13\pi}{4}$ rad

Devemos dividir $\frac{13\pi}{4}$ rad por 2π.

$$\frac{\frac{13\pi}{4}}{2\pi} = \frac{13}{8} = \frac{8}{8} + \frac{5}{8} = 1 + \frac{5}{8}$$

$$\frac{13\pi}{4} = \left(1 + \frac{5}{8}\right) \cdot 2\pi = 2\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{5\pi}{4} + 2\pi$$

$\frac{5\pi}{4}$ é a primeira determinação positiva e a expressão geral é $\alpha = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.

Arcos Côngruos

São aqueles que possuem a mesma origem e a mesma extremidade, em que a diferença entre eles é um múltiplo de 360^{o} (ou 2π rad).

Exemplos:

a) 1840^{o} e 40^{o} são côngruos, pois $1840^{o} - 40^{o} = 1800^{o} = 5 \cdot 360^{o}$

b) $\frac{21\pi}{5}$ rad e $\frac{\pi}{5}$ rad são côngruos, pois

$$\frac{21\pi}{5}\text{rad} - \frac{\pi}{5}\text{rad} = \frac{20\pi}{5}\text{rad} = 4\pi\text{rad} = 2 \cdot 2\pi \text{ rad}$$

Exercício Resolvido

Determine em quais quadrantes estão os seguintes arcos:

a) 63^o

Para verificarmos em que quadrante os arcos se encontram, devemos determinar a 1ª determinação positiva.

63^o está no primeiro quadrante, pois $0^o < 63^o < 90^o$.

b) $1630^o \ \underline{|\ 360^o\ }$

$\quad 190^o \quad\quad 4$

190^o está no 3º quadrante, pois $180^o < 190^o < 270^o$.

c) -230^o

-230^o está na primeira volta negativa, então $-230^o + 360^o = 130^o$

130^o está no 2º quadrante, pois $90^o < 130^o < 180^o$.

d) $\frac{4\pi}{3}$rad

Devemos converter $\frac{4\pi}{3}$rad em graus.

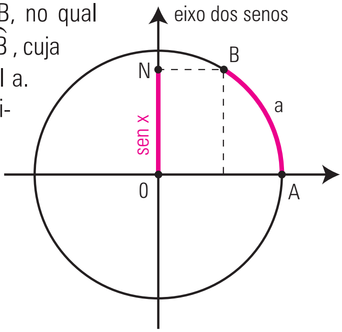
$$\frac{4 \cdot 180^o}{3} = 240^o$$

240^o está no 3º quadrante, pois $180^o < 240^o < 270^o$.

Razões Trigonométricas na Circunferência

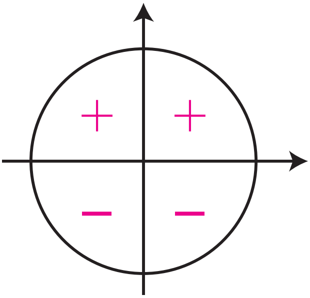
Função Seno

Marcamos um ponto B, no qual determinamos um arco $\overset{\frown}{AB}$, cuja medida é um número real a. O seno desse arco é definido como o valor da ordenada do ponto B.



$\text{sen } x = \overline{ON}$

Variação de sinal da função seno



O seno será positivo no 1º e 2º quadrantes e negativo no 3º e 4º quadrantes.

Domínio da função seno

O domínio da função seno é o conjunto dos números reais.

$D = \mathbb{R}$

Imagem

$Im = [-1, 1]$ ou $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$

Período

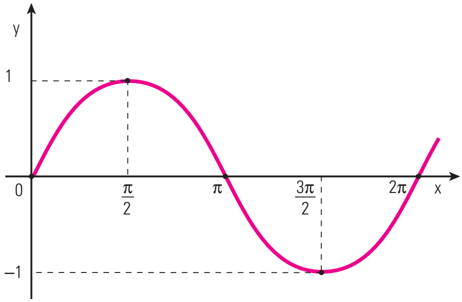
O valor do seno se repete a cada volta, sendo uma função periódica.

Seu período é 2π rad ou $P = 2\pi$

Valores importantes:

	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0

Gráfico



O gráfico da função seno é chamado de **senóide**.

Saiba mais

O MEIO AMBIENTE AGRADECE!!!

O cálculo é fundamental em todos os aspectos da Matemática, como, por exemplo, para que as funções trigonométricas sejam realizadas.

Também é necessário o uso do cálculo para que haja uma relação equilibrada entre o meio ambiente e o homem.

A vida pode ser melhorada se calcularmos precisamente as mudanças causadas na natureza.

É necessário pensar na sustentabilidade das atividades humanas, para alcançarmos a melhoria da qualidade de vida para as atuais e futuras gerações.

Calcular a preservação do meio ambiente é uma forma de exercer a cidadania. Qualquer ato incalculado dos seres humanos contra a natureza terá reflexo na própria vida das pessoas.

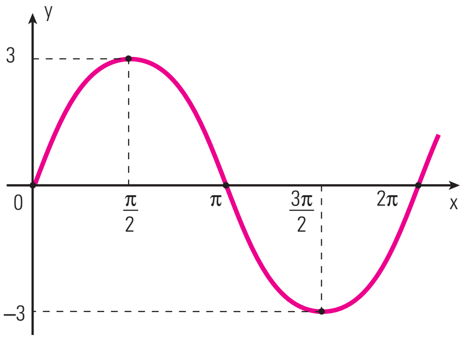
Exemplos:

Construa o gráfico das seguintes funções, dando o domínio, a imagem e o período.

a) $y = 3 \text{ sen } x$

Construindo a tabela, temos:

x	sen x	3 sen x	y
0	0	$3 \cdot 0$	0
$\frac{\pi}{2}$	1	$3 \cdot 1$	3
π	0	$3 \cdot 0$	0
$\frac{3\pi}{2}$	–1	$3 \cdot (-1)$	–3
2π	0	$2 \cdot 0$	0



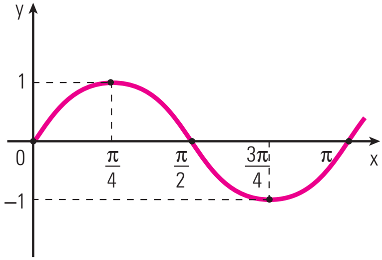
Em que: $D = \mathbb{R}$

$Im = [-3, 3]$

$P = 2\pi$

b) $y = \text{sen } 2x$

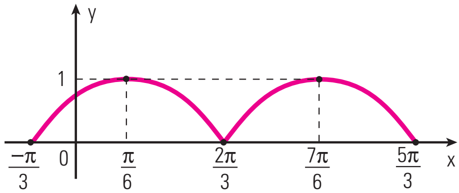
x	2x	sen 2x	y
0	0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	–1	–1
π	2π	0	0



Em que:
D = IR
Im = [–1, 1]
P = π

c) $y = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$x + \dfrac{\pi}{3}$	x	$\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$	y
0	$-\dfrac{\pi}{3}$	0	0
$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{6}$	1	1
π	$\dfrac{2\pi}{3}$	0	0
$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{7\pi}{6}$	–1	1
2π	$\dfrac{5\pi}{3}$	0	0



Em que: D = IR
Im = [0, 1]
P = π

De uma maneira prática, o período é determinado por $P = \dfrac{2\pi}{k}$, em que k é coeficiente de x.

Exemplos:

Para y = 3 sen x, k = 1, portanto $P = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

Para y = sen 2x, k = 2, portanto $P = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Determine o domínio da função: $y = \sqrt{\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)}$

Para que a função exista, temos:

$$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$$

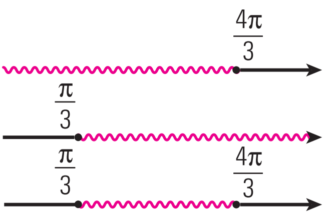
$$0 \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \pi$$

$$x - \frac{\pi}{3} \leq \pi \qquad\qquad x - \frac{\pi}{3} \geq 0$$

$$x \leq \pi + \frac{\pi}{3} \qquad\qquad x \geq \frac{\pi}{3}$$

$$x \leq \frac{4\pi}{3}$$

Na reta real:



$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3} \right\}$$

Determine m para que exista sen x = 2m – 3.

Solução:

$-1 \leq \text{sen } x \leq 1$

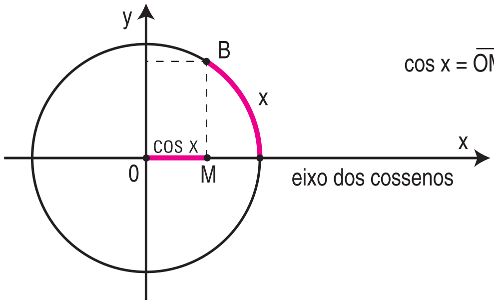
$-1 \leq 2m - 3 \leq 1$

$2 \leq 2m \leq 4$

$1 \leq m \leq 2$ $\quad S = \{m \in \mathbb{R} / 1 \leq m \leq 2\}$

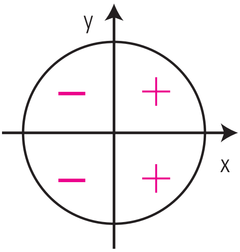
Função Cosseno

É a abscissa da extremidade do ponto B no ciclo trigonométrico.



$\cos x = \overline{OM}$

Variação de sinal da função cosseno



O cosseno é positivo no 1º e 4º quadrantes e negativo no 2º e 3º quadrantes.

Domínio da função cosseno

O domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais.

Imagem

Im = [– 1,1] ou $-1 \le \cos x \le 1$.

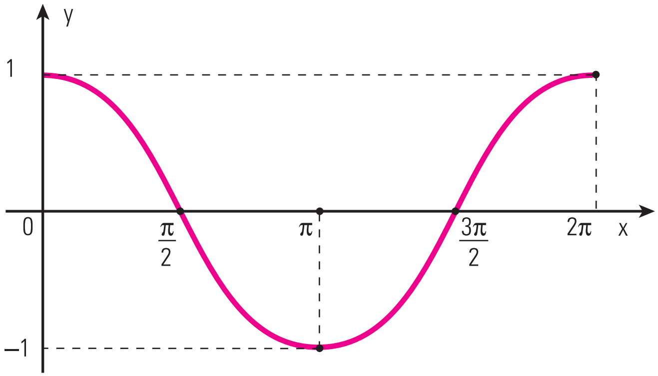
Período

Como na função seno, o período da função cosseno é $P = \frac{2\pi}{k}$.

Valores Notáveis

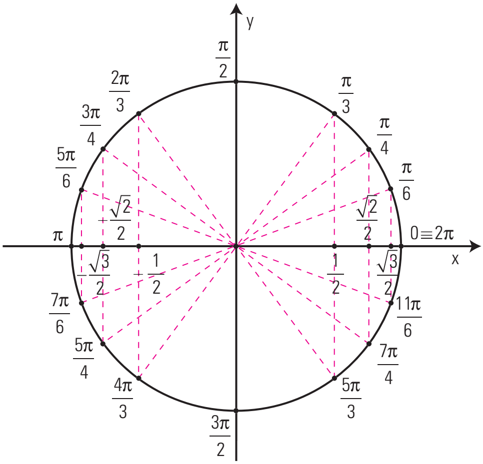
	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1

Gráfico



O gráfico da função cosseno é chamado **cossenóide.**

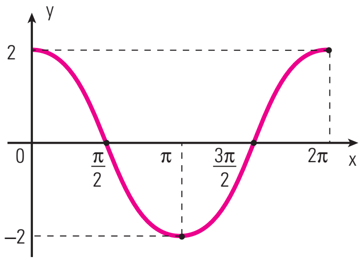
Representação dos valores notáveis no círculo trigonométrico:



Exemplos:

1) $y = 2 \cos x$

x	cos x	2 cos x	y
0	1	$2 \cdot 1$	2
$\frac{\pi}{2}$	0	$2 \cdot 0$	0
π	–1	$2 \cdot (-1)$	–2
$\frac{3\pi}{2}$	0	$2 \cdot 0$	0
2π	1	$2 \cdot 1$	2



Em que: $D = \mathbb{R}$

$Im = [-2, 2]$

$P = 2\pi$

2) Determine K para que satisfaça a igualdade cos x = 3k – 1

Solução:

$-1 \leq 3k - 1 \leq 1$

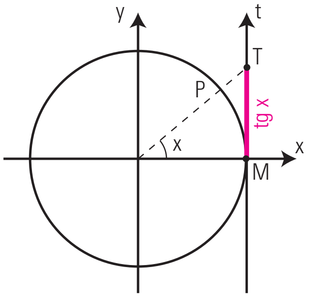
$0 \leq 3k \leq 2$

$0 \leq k \leq \dfrac{2}{3}$

$S = \left\{ k \in \mathbb{R} / 0 \leq k \leq \dfrac{2}{3} \right\}$

Função Tangente

O eixo das tangentes é a reta t, paralela ao eixo y, traçada pelo ponto M.



$\text{tg}\, x = \overline{MT}$

Relacionando: $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$.

Domínio da função tangente

$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

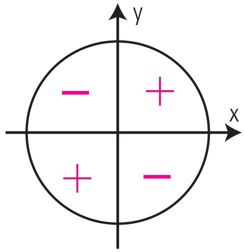
Imagem

Im =]–∞, +∞[ou Im = $\mathbb{R}$

Período

O período da função tangente é P = π

Variação do sinal da função tangente

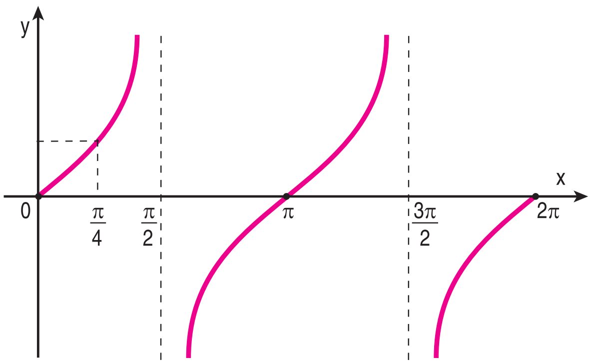


A tangente é positiva no 1º e 3º quadrantes e negativa no 2º e 4º quadrantes.

Valores Notáveis

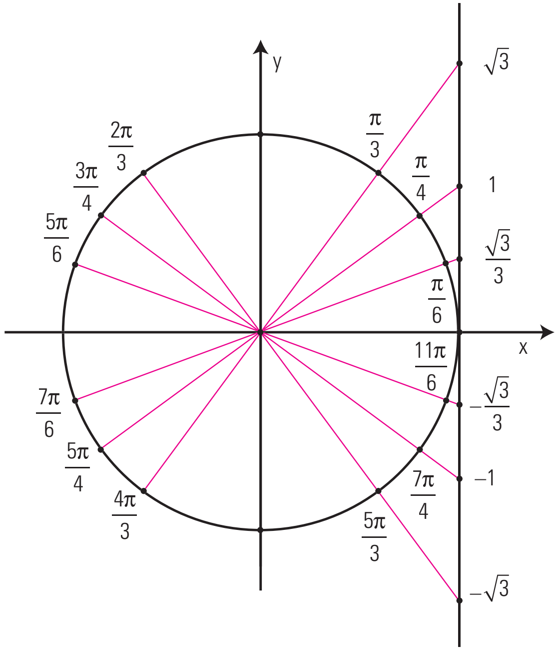
	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Gráfico



O gráfico da função tangente é chamado **tangentóide**.

Representação dos valores notáveis no ciclo trigonométrico:



Exemplos:

1) Determine os domínios das funções:

a) $y = \text{tg } 2x$

A condição que devemos impor para obter o domínio é $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, então:

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{Logo: } D = \left\{ x \in \mathbb{R} / \, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

b) $y = \text{tg}\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$3x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$3x \neq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$3x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$$

Logo: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{K\pi}{3} \right\}$

2) Determine o período da função $y = \text{tg}4x$.

Solução:

As funções da forma $y = \text{tg}\, kx$ têm período $P = \dfrac{\pi}{k}$.

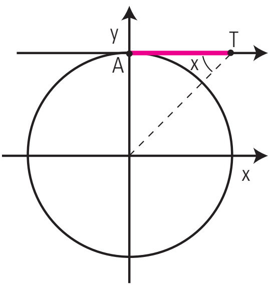
Assim temos:

$$k = 4 \Rightarrow P = \frac{\pi}{4}$$

Cotangente de um Ângulo

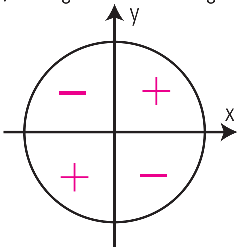
Podemos relacionar $\cot g\, x = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$

No ciclo trigonométrico, o eixo das cotangentes é o eixo paralelo ao eixo das abscissas e perpendicular ao eixo das ordenadas pelo ponto A.



Variação do sinal da função cotangente

No 1º e 3º quadrantes, a cotg x tem sinal positivo.
No 2º e 4º quadrantes, a cotg x tem sinal negativo.



Valores notáveis

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cotg x	$\nexists$	0	$\nexists$	0	$\nexists$

Podemos definir cotangente sendo o inverso da tangente, $\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$

ou $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$ sendo sen $x \neq 0$.

$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \pi + k\pi\}$

$Im = \mathbb{R}$ $P = \pi$

Exemplo:
Dê o valor de:

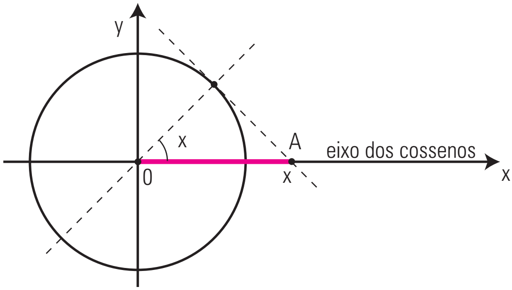
a) $\text{cotg } 45^o = \frac{\cos 45^o}{\text{sen } 45^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

b) $\text{cotg } 30^0 = \frac{\cos 30^0}{\text{sen } 30^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = \sqrt{3}$

c) cotg 0^o = não é definida

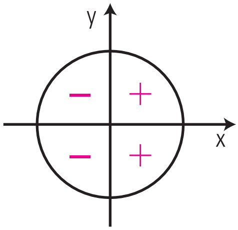
Função Secante

Definimos secante de x como a abscissa $\overline{OA}$ do ponto A.



Variação do sinal da função secante

A variação de sinal é a mesma da função cosseno.
No 1º e 4º quadrantes, a secante tem sinal positivo.
No 2º e 3º quadrantes, a secante tem sinal negativo.



Valores notáveis

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sec x	1	$\nexists$	–1	$\nexists$	1

A função secante é o inverso do cosseno: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ e $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$,

com $k \in \mathbb{Z}$.

$Im = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq 1 \text{ ou } y \leq -1\}$ $\qquad$ $P = 2\pi$

Exemplo:

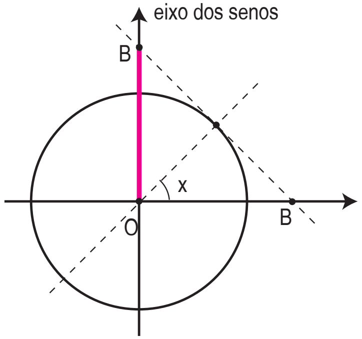
Determine:

a) $\sec 60^o = \dfrac{1}{\cos 60^o} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

b) $\sec 90^o = \dfrac{1}{\cos 90^o} = \dfrac{1}{0}$ a função não se define para $x = 90^o$ ou $x = 270^o$

Função Cossecante

Definimos cossecante de x como a ordenada $\overline{OB}$ do ponto B.

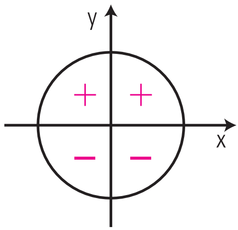


Variação do sinal da função cossecante

A variação do sinal é a mesma da função seno.

No 1º e 2º quadrantes, a cossecante tem sinal positivo.

No 3º e 4º quadrantes, a cossecante tem sinal negativo.



Valores notáveis

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cossec x	$\nexists$	1	$\nexists$	–1	$\nexists$

A função cossecante é o inverso da função seno: cossen $x = \frac{1}{\text{sen } x}$, em que $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq 1 \text{ ou } y \leq -1\}$ $\qquad$ $P = 2\pi$

Exemplo:

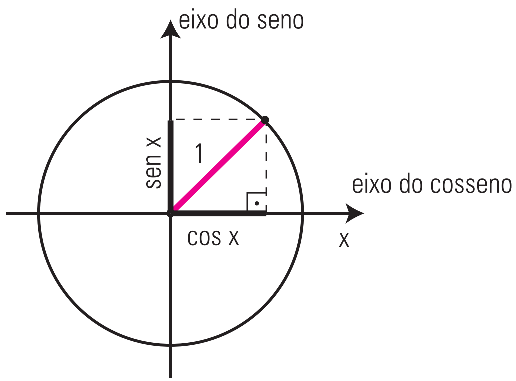
Determine cossec 60º.

$$\text{cossec } 60^\circ = \frac{1}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

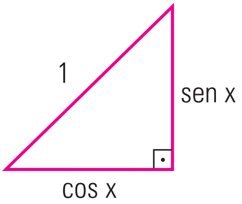
Relações Trigonométricas

Relação Fundamental

Considerando o ciclo trigonométrico, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras:



$$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$$

Então:

$$\boxed{\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Outras Relações Fundamentais

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} \quad \text{ou} \quad \text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Relações Trigonométricas Derivadas

$$\boxed{\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x}$$

$$\boxed{1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x \qquad \text{ou} \qquad \text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x}$$

Exemplos:

1) Determine o valor da expressão:

$$\left(\sec\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\pi \cdot \left(\text{cotg}\frac{\pi}{3}\right)$$

Solução:
Temos:

$$\sec\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\pi=-1$$

$$\cot g\frac{\pi}{3}=\frac{1}{tg\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Substituindo na expressão:

$$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(-1)\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{-6}{9}=\frac{-2}{3}$$

2) Sabendo que $\text{sen }x=\frac{1}{2}$ e que $0<x<\frac{\pi}{2}$, calcule as demais funções trigonométricas.

Solução:
Aplicando a relação fundamental:

$$\text{sen}^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2 x=1$$

$$\cos^2 x=1-\frac{1}{4}$$

$$\cos^2 x=\frac{3}{4}$$

$$\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como cos x $\in$ ao 1º quadrante, ele será positivo.

$$tg\ x=\frac{\text{sen }x}{\cos\ x}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot g\ x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = \sqrt{3}$$

$$\sec x = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\sec x = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

3) Para que valores de y temos, simultaneamente, sen $x = y$ e $\cos x = y + 1$?

Solução:

Substituindo os valores na relação fundamental:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$y^2 + (y+1)^2 = 1$$
$$y^2 + y^2 + 2y + 1 = 1$$
$$2y^2 + 2y = 0$$
$$y(2y + 2) = 0$$
$$y = 0 \quad \text{ou} \quad 2y + 2 = 0$$
$$2y = -2$$
$$y = -1$$

Portanto, $y = 0$ ou $y = -1$

4) Calcule sen x e cos x sabendo que: $3\ \text{sen } x + \cos x = -1$.

Solução:

Montando o sistema, temos:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$3\ \text{sen } x + \cos x = -1$$

Isolando cos x:

$$\cos x = -1 - 3\ \text{sen } x$$

Substituindo na relação fundamental:

$\text{sen}^2 x + (-1 - 3 \text{ sen } x)^2 = 1$

$\text{sen}^2 x + 1 + 6 \text{ sen } x + 9 \text{ sen}^2 x = 1$

$10 \text{ sen}^2 x + 6 \text{ sen } x = 0$

$\text{sen } x (10 \text{ sen } x + 6) = 0$

$\text{sen } x = 0$ ou $10 \text{ sen } x + 6 = 0$

$\text{sen } x = \dfrac{-6}{10}$ $\quad$ $\text{sen } x = \dfrac{-3}{5}$

Como $\cos x = -1 - 3 \text{ sen } x$:

$\cos x = -1 \cdot -3 \cdot \left(\dfrac{-3}{5}\right)$ ou $\cos x = -1 \cdot -3$

$\cos x = -1 + \dfrac{9}{5}$ $\quad$ $\cos x = -1$

$\cos x = \dfrac{4}{5}$

Identidades Trigonométricas

Por meio das funções trigonométricas, podemos demonstrar as identidades trigonométricas tornando-as verdadeiras.

Para provar que uma identidade trigonométrica é verdadeira, procuramos trabalhar com um membro até chegarmos ao outro membro.

Exemplos:

Prove a existência das identidades trigonométricas:

a) $(1 - \text{sen}^2 x) \cdot (1 + \text{cotg}^2 x) = \text{cotg}^2 x$

Solução:

Substituindo $(1 - \text{sen}^2 x)$ por $\cos^2 x$ e $1 + \text{cotg}^2 x$ por $\text{cossec}^2 x$, temos:

$$\cos^2 x \cdot (\text{cossec}^2 x) = \text{cotg}^2 x$$

$$\cos^2 x \cdot \frac{1}{\text{sen}^2 x} = \text{cotg}^2 x$$

$$\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \text{cotg}^2 x$$

b) tg x + cotg x = sec x · cossec x

Solução:

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\text{sen } x}$$

$$\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x} = \frac{1}{\text{sen } x \cdot \cos x}$$

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\frac{1}{\text{sen } x \cdot \cos x} = \frac{1}{\text{sen } x \cdot \cos x}$$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

c) tg x · sen x + cos x = sec x

Solução:

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \text{sen } x + \cos x = \sec x$$

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x = \sec x$$

$$\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \sec x$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Redução do 2° Quadrante ao 1° Quadrante

Se dois ângulos $a + b = \pi$, eles são chamados ângulos suplementares.

Nesse caso faremos a redução do 2º quadrante para o 1º quadrante, pois são arcos suplementares.

Então:

$$\text{sen } (\pi - x) = \text{sen } x$$
$$\cos (\pi - x) = -\cos x$$
$$\text{tg } (\pi - x) = -\text{tg } x$$
$$\text{cotg } x = -\text{cotg } (\pi - x)$$
$$\sec x = -\sec (\pi - x)$$
$$\text{cossec } x = \text{cossec } (\pi - x)$$

Redução do 3º Quadrante para o 1º Quadrante

$$\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$$
$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x - \pi)$$
$$\sec x = -\sec(x - \pi)$$
$$\operatorname{cossec} x = -\operatorname{cossec}(x - \pi)$$

Redução do 4º Quadrante para o 1º Quadrante

$$\operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x$$
$$\cos(2\pi - x) = \cos x$$
$$\operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x$$
$$\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(2\pi - x)$$
$$\sec x = \sec(2\pi - x)$$
$$\operatorname{cossec} x = -\operatorname{cossec}(2\pi - x)$$

Arcos Complementares

Se $a+b=\frac{\pi}{2}$, são chamados arcos complementares em que x e $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ são complementares.

Temos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cotg} x$$

Exemplos:

1) Calcule o valor da expressão, reduzindo ao 1º quadrante:

Solução:

$$\operatorname{sen} 150^o=\operatorname{sen}(180^o-150^o)=\operatorname{sen} 30^o=\frac{1}{2}$$

2) Reduza do 2º quadrante para o 1º quadrante sec $(\pi - x)$

Solução:

$$\sec(\pi - x) = \frac{1}{\cos(\pi - x)} = \frac{1}{-\cos x} = -\sec x$$

3) Reduza 330º para um arco do 1º quadrante.

Solução:

Fazemos $360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$. Assim, temos:

$\text{sen } 330^\circ = -\text{sen } 30^\circ$

$\cos 330^\circ = \cos 30^\circ$

$\text{tg } 330^\circ = -\text{tg } 30^\circ$

$\text{cotg } 330^\circ = -\text{cotg } 30^\circ$

$\sec 330^\circ = \sec 30^\circ$

$\text{cossec } 330^\circ = -\text{cossec } 30^\circ$

4) Simplifique a expressão:

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \text{sen}(2\pi - x)$$

Solução:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$$

$$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{tg } x$$

$$\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen } x$$

Substituindo na expressão, temos:

$y = \text{sen } x \cdot \text{tg } x \cdot (-\text{sen } x)$

$y = -\text{sen}^2 x \cdot \text{tg } x$

Transformações Trigonométricas

Adição e Subtração de Arcos

Dados dois arcos a e b, aplique as seguintes identidades:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$
$$\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$tg(a+b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b}$$

$$tg(a-b) = \frac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a \cdot tg\, b}$$

$$cotg(a+b) = \frac{cotg\, a \cdot cotg\, b - 1}{cotg\, a + cotg\, b}$$

$$cotg(a-b) = \frac{cotg\, a \cdot cotg\, b + 1}{cotg\, b - cotg\, a}$$

Exemplos:

1) Calcule:

a) $\operatorname{sen} 75^o$

$$\operatorname{sen}(30^o + 45^o) = \operatorname{sen} 30^o \cdot \cos 45^o + \operatorname{sen} 45^o \cdot \cos 30^o$$

$$\operatorname{sen}(30^o + 45^o) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(30^o + 45^o) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{sen}(30^o + 45^o) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b) $\cos 15^o$

$$\cos(45^o - 30^o) = \cos 45^o \cdot \cos 30^o + \operatorname{sen} 45^o \cdot \operatorname{sen} 30^o$$

$$\cos(45^o - 30^o) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos(45^o - 30^o) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(45^o - 30^o) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{-2}=\frac{-\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2}$$

2) Sabendo que $\operatorname{sen} x=\frac{4}{5},\ 0<x<\frac{\pi}{2}$, calcule $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Solução:

Aplicando a relação fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cos^2 x=1$$

$$\cos^2 x=1-\frac{16}{25}$$

$$\cos^2 x=\frac{9}{25}$$

$$\cos x=\frac{3}{5}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{10}-\frac{4\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Arco Duplo

As fórmulas do arco duplo decorrem das fórmulas de adição de arcos.

$$\text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \qquad \text{ou}$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \qquad \text{ou}$$

$$\cos 2a = 1 - 2\,\text{sen}^2 a$$

$$\text{tg } 2a = \frac{2 \cdot \text{tg } a}{1-\text{tg}^2 a}$$

Exemplos:

1) Determine sen 2a, cos 2a e tg 2a , sabendo que $\cos a=\frac{3}{4}$ e $0<a<\frac{\pi}{2}$.

Solução:

$$\text{sen}^2 a+\cos^2 a=1$$

$$\text{sen}^2 a+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1$$

$$\text{sen}^2 a=1-\frac{9}{16}$$

$$\text{sen}^2 a=\frac{7}{16}$$

$$\text{sen } a=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2a=\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 \qquad \text{sen } 2a=2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3}{4} \qquad \text{sen } 2a=\frac{6\sqrt{7}}{16}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\cos 2a = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} \qquad \operatorname{sen} 2a = \frac{6\sqrt{7}}{16} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2} \qquad \operatorname{tg} a = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{\frac{2\sqrt{7}}{3}}{1 - \frac{7}{9}} \Rightarrow \operatorname{tg} 2a = \frac{\frac{2\sqrt{7}}{3}}{\frac{2}{9}}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{\cancel{2}\sqrt{7}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{2}} = 3\sqrt{7}$$

2) Simplifique a expressão:
$y = \operatorname{sen}^2 a + \cos 2a$

Solução:

$y = \operatorname{sen}^2 a + (\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a)$
$y = \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$
$y = \cos^2 a$

Arco Metade

A partir das funções trigonométricas do arco que mede a, podemos calcular $\operatorname{sen} \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$ e $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

Exemplos:

1) Dado $\cos a = \frac{1}{2}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

Solução:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} \qquad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} \qquad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) Dado $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calcule sen 22º30’.

Solução:

$$\operatorname{sen}\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}$$

$$\operatorname{sen} 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$\text{sen } 22^o 30' = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\text{sen } 22^o 30' = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Transformação em Produto

Sendo $p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$, podemos obter:

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \text{ sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \text{ sen} \frac{p+q}{2} \text{ sen} \frac{p-q}{2}$$

Exemplos:

1) Transforme em produto $\cos 70^o + \cos 20^o$.

Solução:

$$\cos 70^o + \cos 20^o = 2 \cos \frac{70^o + 20^o}{2} \cdot \cos \frac{70^o - 20^o}{2}$$

$$\cos 70^o + \cos 20^o = 2 \cos \frac{90^o}{2} \cdot \cos \frac{50^o}{2}$$

$$\cos 70^o + \cos 20^o = 2 \cdot \cos 45^o \cdot \cos 25^o$$

$$\cos 70^o + \cos 20^o = \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \cos 25^o$$

$$\cos 70^o + \cos 20^o = \sqrt{2} \cdot \cos 25^o$$

2) Fatore a expressão:
$\text{sen } 4x - \text{sen } 2x$

Solução:

$$\text{sen } 4x - \text{sen } 2x = 2\,\text{sen}\frac{4x-2x}{2} \cdot \cos\frac{4x+2x}{2}$$

$$\text{sen } 4x - \text{sen } 2x = 2\,\text{sen}\,\frac{2x}{2} \cdot \cos\frac{6x}{2}$$

$$\text{sen } 4x - \text{sen } 2x = 2\,\text{sen } x \cdot \cos 3x$$

3) (FGV) A expressão $\dfrac{\text{sen } 4x + \text{sen } 2x}{\cos 4x - \cos 2x}$ equivale a:

a) cotg x
b) tg x
c) – cotg x
d) – tg x
e) n.d.a.

Solução:

$$\text{sen } 4x + \text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen}\frac{4x+2x}{2} \cdot \cos\frac{4x-2x}{2}$$

$$\text{sen } 4x + \text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen}\frac{6x}{2} \cdot \cos\frac{2x}{2}$$

$$\text{sen } 4x + \text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } 3x \cdot \cos\ x$$

$$\cos 4x - \cos 2x = -2 \cdot \text{sen}\frac{4x+2x}{2} \cdot \text{sen}\frac{4x-2x}{2}$$

$$\cos 4x - \cos 2x = -2 \cdot \text{sen}\frac{6x}{2} \cdot \text{sen}\frac{2x}{2}$$

$$\cos 4x - \cos 2x = -2 \cdot \text{sen } 3x \cdot \text{sen}\ x$$

Substituindo, temos:

$$\frac{\text{sen } 4x + \text{sen } 2x}{\cos 4x - \cos 2x} = \frac{\cancel{2\,\text{sen } 3x} \cdot \cos x}{\cancel{-2\,\text{sen } 3x} \cdot \text{sen } x} = \frac{-\cos x}{\text{sen } x} = -\text{cotg } x$$

Resposta: c

Equações Trigonométricas

Toda equação que apresenta uma função trigonométrica com arco desconhecido é chamada de equação trigonométrica.

Exemplos:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

b) $\text{sen } x = \text{sen } 45^o$

c) $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

1º Tipo

$\text{sen } x = a$ ou $\cos x = a$ ou $\text{tg } x = a$

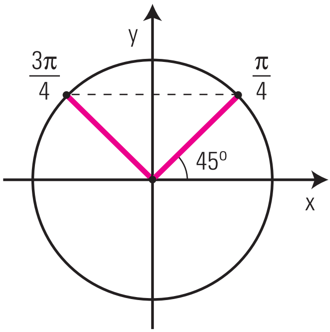
Exemplos:

a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } x = \text{sen } 45^o$

$x = 45^o$

Como $f(x) = \text{sen } x$ é positivo no primeiro e segundo quadrantes, temos:



Logo, a equação tem solução igual a:

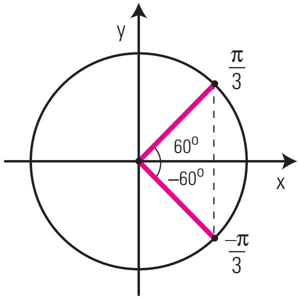
$$\left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$$

Expressão geral:

$\text{sen } x = \text{sen } a$

$S = \{x = a + 2k\pi \text{ ou } x = (\pi - a) + 2k\pi\}$

b) $\cos x = \frac{1}{2}$



Solução:

$\cos x = \cos 60^o$

$x = 60^o$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

Expressão geral:

$\cos x = \cos a$

$S = \{x = \pm a + 2k\pi\}$

c) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$

$x = \frac{2\pi}{3}$ ou

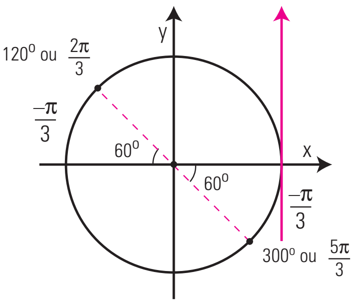
$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$

$x = \frac{5\pi}{3}$

A tangente é negativa no 2º e 4º quadrantes.

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \begin{cases} x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

Representando no ciclo trigonométrico, as duas soluções podem ser expressas:



$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Logo:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = -\frac{\pi}{3},\ k\pi \right\}$$

Expressão geral:
tg x = tg a
$S = \{x = a + k\pi\}$

Equações Redutíveis ao 2º Grau

Exemplo:
Resolva a equação $\operatorname{sen}^2 x + \cos x - 1 = 0$
Solução:
Partindo da relação fundamental:
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ ou $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

Substituindo na equação dada:
$\operatorname{sen}^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0$$
$$\cancel{1} - \cos^2 x + \cos x - \cancel{1} = 0$$
$$\cos^2 x - \cos x = 0$$
$$\cos x (\cos x - 1) = 0$$
$$\cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x - 1 = 0$$
$$\cos x = 1$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{ou} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \end{cases}$$

Solução $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \text{ ou } \ x = 2k\pi \right\}$

Equações Redutíveis a um Sistema de Equações

Dada a equação $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$.

Sabemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Podemos formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos x = 1 & \text{(equação dada)} \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \text{(relação fundamental)} \end{cases}$$

Isolando sen x = 1 – cos x na 1ª equação e substituindo na 2ª equação:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ (1 - \cos x)^2 + \cos^2 x &= 1 \\ 1 - 2\cos x + \cos^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 2\cos^2 x - 2\cos x &= 0 \\ \cos x(2\cos x - 2) &= 0 \\ \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\cos x - 2 &= 0 \\ 2\cos x &= 2 \\ \cos x &= 1 \end{aligned}$$

Então, para:

$\cos x = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 1$

$\cos x = 1 \Rightarrow \text{sen } x = 0$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\text{ ou }\; x = 2k\pi \right\}$$

Equação Transformada em Produto

Para resolvermos esse tipo de equação nos baseamos na transformação de uma adição ou subtração de funções trigonométricas em um produto.

Exemplo:

Resolva a equação:

$\cos 3x + \cos 7x - \cos 5x = 0$

Transformando cos 3x + cos 7x em produto, temos:

$$\cos 3x + \cos 7x = 2\cos\frac{3x + 7x}{2} \cdot \cos\frac{7x - 3x}{2}$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2\cos 5x \cdot \cos 2x$$

Substituindo na equação:

$2\cos 5x \cdot \cos 2x - \cos 5x = 0$

Colocando cos 5x em evidência:

$\cos 5x(2\cos 2x - 1) = 0$

$\cos 5x = 0$ ou $2\cos 2x - 1 = 0$

$5x = k\pi \qquad 2\cos 2x = 1$

$x = \dfrac{k\pi}{5} \qquad \cos 2x = \dfrac{1}{2}$

$$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \cos 2x = \cos\frac{5\pi}{3}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} \qquad\qquad 2x = \frac{5\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \qquad\qquad x = \frac{5\pi}{6}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{k\pi}{5} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

Inequações Trigonométricas

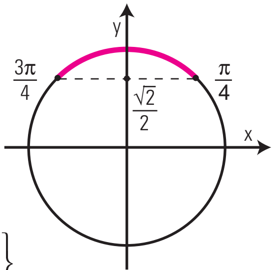
Inequações trigonométricas relacionam funções trigonométricas por meio de uma desigualdade.

Exemplos:

Resolva as inequações:

a) $\text{sen } x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

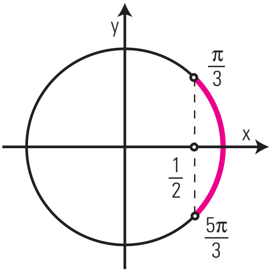
$$\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ou}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$$

b) $\cos x > \dfrac{1}{2}$

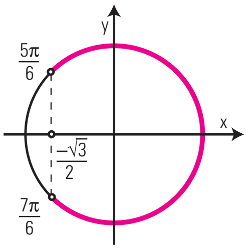
$$\cos x = \frac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases} \quad \text{ou}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $\cos x > \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

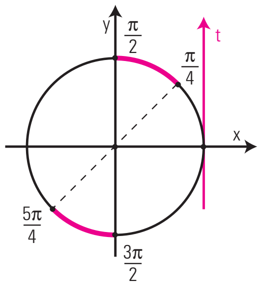
$$\cos x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} & \text{ou} \\ x = \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} / 0 \le x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x \le 2\pi\right\}$$

d) $\operatorname{tg} x \ge 1$

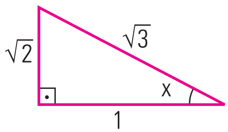
$$\operatorname{tg} x = \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} & \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

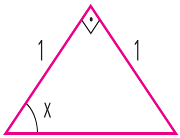


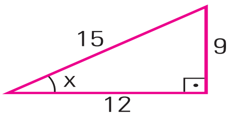
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{2}\right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Calcule sen x, cos x e tg x em cada um dos triângulos abaixo:

a) 

c) 

b) 

2) Um avião está a 300 m de altura quando vê a cabeceira da pista sob um ângulo com declive de 30º. A que distância o avião está da cabeceira da pista?

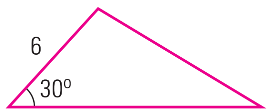
3) A que altura de uma parede uma escada de 12 m se apóia, se a escada e a parede formam um ângulo de 30º?

4) Calcule $\hat{A}$, dados os lados de um triângulo qualquer $a = 8$, $b = 8$ e $c = 8\sqrt{3}$.

5) Calcule a área do triângulo ABC, sabendo que $a = 3$ cm, $b = 2$ cm e $\hat{C} = 45º$.

6) (FGV-SP) A área do triângulo da figura é:

a) 18
b) 9
c) 10
d) 36
e) 40

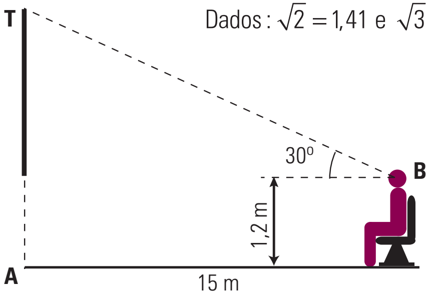


7) Em um triângulo ABC, $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 5$ e $B = 60º$. Determine o lado $\overline{AC}$.

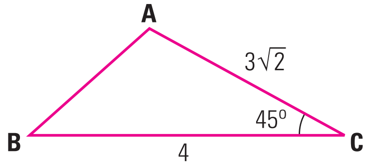
8) Um dos ângulos internos de um paralelogramo de lados 6 e 8 mede 120º. Calcule a maior diagonal.

9) (FAAP-SP) A seguir está representado um esquema de uma sala de cinema, com piso horizontal. Qual deve ser a medida de AT para que um espectador sentado a 15 m da tela, com os olhos 1,2 m acima do piso, veja o ponto mais alto da tela, T, a 30º da horizontal?

Dados: $\sqrt{2} = 1{,}41$ e $\sqrt{3} = 1{,}73$

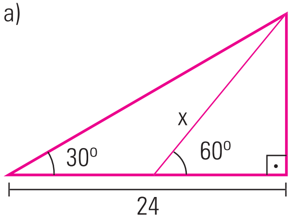


10) Considerando o triângulo da figura, calcule $\overline{AB}$.

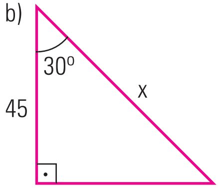


11) Calcule x nos triângulos retângulos a seguir:

a)



b)



12) (UNICAMP-SP) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa d'água e o ângulo formado pelas direções caixa d'água – bomba e caixa d'água – casa é 60º. Se a idéia é bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento serão necessários?

13) Converta em radianos:

a) 90º
c) 300º
e) 330º
b) 120º
d) 210º
f) 2º

14) Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio:

a) 12h 15min
b) 16h 40min

15) Converta em graus:

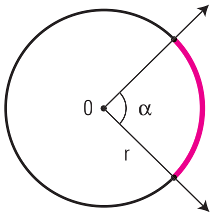
a) $\frac{\pi}{10}$rad
c) $\frac{4\pi}{3}$rad
e) $\frac{5\pi}{6}$rad
b) $\frac{7\pi}{4}$rad
d) $\frac{5\pi}{4}$rad
f) $\frac{\pi}{8}$rad

16) Determine em radianos a medida de um arco de circunferência cujo comprimento mede 30 m e o diâmetro dessa circunferência, 20 m.

17) (FUVEST) Um arco de circunferência mede 300º e seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio, em metros?

a) 157
c) 382
e) 764
b) 284
d) 628

18) Considerando a figura, preencha a tabela abaixo com valores de r e ℓ (dados em cm) e α (em graus ou radianos).



r	ℓ	α
2		30º
	172	$\frac{\pi}{4}$
3	843	
	1382	$\frac{2\pi}{3}$

19) As rodas de um automóvel tem 80 cm de diâmetro. Determine o número de voltas efetuadas pelas rodas quando o automóvel percorre 16,328 km.

Adote $\pi = 3{,}14$

20) Numa circunferência de raio 15 cm, um arco mede 240º. Qual é o comprimento desse arco?

21) Determine o quadrante onde estão situadas as extremidades dos seguintes arcos:

a) 250º
b) $\frac{-12\pi}{5}$rad
c) –400º
d) $\frac{-11\pi}{4}$rad

22) Identifique em cada caso se os arcos são côngruos:

a) 1640º e 920º
c) $\frac{5\pi}{6}$rad e $\frac{19\pi}{6}$rad
b) $\frac{16\pi}{3}$rad e $\frac{4\pi}{3}$rad

23) Calcule a 1ª determinação positiva e escreva a expressão geral dos arcos:

a) -3.190° b) $\frac{11\pi}{2}$ c) $\frac{13\pi}{4}$

24) Determine k para que exista o arco que satisfaz as seguintes igualdades:

a) $\text{sen } x = 3k - 4$

b) $\cos x = k^2 + 2k + 1$

c) $\text{sen } x = \frac{2k+3}{4}$

25) Determine a imagem e o período que representa cada uma das funções:

a) $y = \cos \frac{x}{2}$ b) $y = -2 + \cos 2x$ c) $y = 2\text{sen } x$

26) Determine o domínio das funções:

a) $y = \text{tg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x) = \sqrt{\text{sen } x}$

27) Indique o valor de:

a) $\text{sen}\frac{5\pi}{2}$

b) $\text{tg } 2\pi$

c) $\text{tg}\frac{\pi}{2}$

d) $\text{cossec } 60^{\circ}$

e) $\sec 135^{\circ}$

f) $\sec\frac{13\pi}{6}$

28) Simplifique as expressões:

a) $y = 2 \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{2} + \cos\pi$

b) $y = \dfrac{3 \cdot \cos\pi - 2 \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}}{4\cos 0}$

c) $y = \dfrac{3\,\text{tg}\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}}{\text{sen}\frac{\pi}{3}}$

29) Calcule:

a) cos x, sabendo que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e tg x = 1

b) sec x, sabendo que $\text{sen } x = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

c) cotg x, sabendo que $\text{cossec } x = \frac{13}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

d) sen x, sabendo que cotg x = 1 e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

30) Calcule y:

$$y = \frac{2\cos x + 1}{\sec 3x + \cos 2x}, \quad \text{sendo} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

31) Simplifique as seguintes expressões:

a) $\dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \text{sen}(\pi + x)}{\text{sen}(\pi - x) \cdot \cos(2\pi - x)}$

b) $\cos(3\pi - x) + \text{sen}\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)$

c) $\dfrac{\text{sen}(\pi - x) \cdot \text{tg}(\pi + x) \cdot \cos(4\pi - x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \text{tg}(3\pi - x)}$

32) (MACK-SP) Se $x = \frac{\pi}{2}$, então: $\dfrac{\text{sen}x + 2\,\text{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) - \cos 2x}{\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \text{cossec } x + \sec 4x}$ é igual a:

a) – 2 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) 4

33) Sabendo que $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule as demais funções trigonométricas.

34) Dado sec x = 2 e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule:

a) cos x b) sen x c) tg x d) cotg x e) cossec x

35) Sendo $\text{sen } x = \sqrt{-m+2}$ e $\cos x = \sqrt{-m+3}$, determine o valor de m.

36) Calcule o valor de x que verifica, simultaneamente, as igualdades sen a = x + 2 e $\cos a = \sqrt{-x^2+1}$.

37) Aplicando as fórmulas de adição e subtração de arcos, calcule o valor de:

a) sen 105º b) sen 15º c) tg 15º d) tg 75º e) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

38) Sendo $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\text{sen }\beta = \frac{12}{13}$ e α e β do 1º quadrante, calcule:

a) sen $(\alpha + \beta)$ b) cos $(\alpha - \beta)$

39) Sabendo que $\text{tg } a = \frac{2}{3}$ e $\text{sen } b = \frac{4}{5}$ com $\frac{\pi}{2} < b < \pi$, calcule tg (a + b).

40) Sabendo que $\text{sen } x = \frac{-4}{5}$ e x ∈ 3º quadrante, calcule:

a) cos 2x b) sen 2x

41) (FEI-SP) Se $\text{sen } x - \cos x = \frac{1}{5}$, calcule sen 2x.

42) Se $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule:

a) sen 2x b) cos 2x c) cotg 2x

43) Se $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, calcule:

a) $\text{sen}\frac{a}{2}$ b) $\cos\frac{a}{2}$ c) $\text{tg}\frac{a}{2}$

44) (FUVEST) Calcular $y = (\text{sen } 22^o30' + \cos 22^o30')^2$

45) (UC-PR) Sabendo que $\cos 36^o = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, então cos 72º vale:

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

c) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

d) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

46) Transforme em produto:

a) sen 80º – sen 40º

b) sen 40º + sen 70º

c) cos 2x · cos 3x

d) $\frac{\text{sen } 10^o + \text{sen } 50^o}{\cos 10^o + \cos 50^o}$

47) (MACK) Fatore sen 68º + cos 38º.

48) Resolva as equações:

a) $\text{sen } 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

d) $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

e) $\text{tg } 2x - \sqrt{3} = 0$

f) $\text{sen } x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{3}$

g) $\cos^2 x - 5 \cos x + 6 = 0$

h) $2 \text{ sen}^2 x - 5 \text{ sen } x + 2 = 0$

49) Resolva as inequações trigonométricas:

a) $\text{sen } x \leq 1$

b) $\cos x \leq \frac{-1}{2}$

c) $\text{tg} > -1$

d) $2 \text{ sen } x \geq -1$

e) $2\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 > 0$

f) $\text{tg}^2 x - \text{tg } x > 0$

Respostas

1) a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{tg } x = \sqrt{2}$

b) $\text{sen } x = \frac{3}{5}$

$\cos x = \frac{4}{5}$

$\text{tg } x = \frac{3}{4}$

c) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg } x = 1$

2) 600 m

3) 10,38 m

4) 30^o

5) $\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2$

6) a

7) $\sqrt{19}$

8) $2\sqrt{37}$

9) 9,86 m

10) $\sqrt{10}$

11) a) 16

b) $x = 30\sqrt{3}$

12) 70 m

13) a) $\frac{\pi}{2}$ rad

b) $\frac{2\pi}{3}$ rad

c) $\frac{5\pi}{3}$ rad

d) $\frac{7\pi}{6}$ rad

e) $\frac{11\pi}{6}$ rad

f) $\frac{\pi}{90}$ rad

14) a) $82^o\,30'$

b) 100^o

15) a) 18^o

b) 315^o

c) 240^o

d) 225^o

e) 150^o

f) $22^o\,30'$

16) 3 rad

17) 382 (c)

18)

r	ℓ	α
2	1,04	30^o
219,1	172	$\frac{\pi}{4}$
3	843	281^o
661,2	1382	$\frac{2\pi}{3}$

19) 6.500

20) 62,8 cm

21) a) 3º quadrante
b) 4º quadrante
c) 4º quadrante
d) 3º quadrante

22) a) sim b) sim c) não

23) a) 50^o e $x = 50^o + k \cdot 360^o$

b) $\frac{3\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

c) $\frac{5\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

24) a) $S = \left\{k \in \mathbb{R} / 1 \le k \le \frac{5}{3}\right\}$

b) $S = \{k \in \mathbb{R} / -2 \le k \le 0\}$

c) $S = \left\{k \in \mathbb{R} / \frac{-7}{2} \le k \le \frac{1}{2}\right\}$

25) a) $Im(y) = [-1, 1]$ $P = 4\pi$

b) $Im(y) = [-3, -1]$ $P = \pi$

c) $Im(y) = [-2, 2]$ $P = 2\pi$

26) a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} / x \ne \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} / 2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

27) a) 1
b) 0
c) não é definida
d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
e) $-\sqrt{2}$
f) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

28) a) –3 b) $\frac{-5}{4}$ c) $\frac{18 + \sqrt{6}}{3}$

29) a) $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{-3\sqrt{8}}{8}$ c) $\frac{-12}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

30) $\frac{-2}{3}$

31) a) –1 b) –2 cos x c) – cos x

32) d

33) sen $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, tg $x = -\sqrt{2}$, cotg $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$, sec $x = -\sqrt{3}$,

cossec $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

34) a) $\dfrac{1}{2}$ c) $\sqrt{3}$ e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

35) 2 36) $x = -1$

37) a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ c) $2-\sqrt{3}$

d) $2+\sqrt{3}$ e) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

38) a) $\dfrac{63}{65}$ b) $\dfrac{56}{65}$

39) $\dfrac{-2}{17}$ 40) a) $\dfrac{-7}{25}$ b) $\dfrac{24}{25}$

41) $\dfrac{24}{25}$ 42) a) -1 b) 0 c) 0

43) a) $\pm\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}}$ b) $\pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}}$ c) $\pm\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)}$

44) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ 45) b

46) a) 2 sen $20^o \cdot \cos 60^o$ c) $\dfrac{\cos 5x + \cos x}{2}$

b) 2 sen $55^o \cos 15^o$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

47) $\cos 8^{o}$

48) a) $S=\left\{x=\frac{\pi}{8}+k\pi, \text{ ou } x=\frac{3\pi}{8}+k\pi, \ k\in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S=\left\{x=\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \ k\in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S=\left\{x=\frac{k\pi}{2}\right\}$

d) $S=\left\{x\in \mathbb{R}/x=\frac{3\pi}{8}+k\pi, \text{ com } k\in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S=\left\{x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, \text{ com } k\in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S=\left\{x=k\cdot 2\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi, \text{ com } k\in \mathbb{Z}\right\}$

g) $S=\varnothing$

h) $S=\left\{x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$

49) a) $S=\{x\in \mathbb{R}/\ 0\le x\le 2\pi\}$

b) $S=\left\{x\in \mathbb{R}/\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right\}$

c) $S=\left\{x\in \mathbb{R}/\frac{-\pi}{4}+k\pi< x<\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

d) $S=\left\{x\in \mathbb{R}/0\le x<\frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6}\le x\le 2\pi\right\}$

e) $S=\left\{x\in \mathbb{R}/\frac{\pi}{6}< x<\frac{5\pi}{6}\right\}$

f) $S=\left\{x\in \mathbb{R}/\frac{\pi}{4}< x<\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4}< x< 2\pi\right\}$