Por que aprender Matrizes e Determinantes?

Algumas vezes, para indicar com clareza determinadas situações, é necessário formar um grupo ordenado de números dispostos em linhas e colunas, ou seja, tabelas de números reais, que são chamadas de Matrizes.

Essa prática é muito usada em nossa vida, daí a importância desse aprendizado.

Onde usar os conhecimentos sobre Matrizes e Determinantes?

As tabelas que encontramos nos jornais e revistas são exemplos de Matrizes. Observe:

	População Urbana (%)	População Rural (%)
1960	45%	55%
1970	56%	44%
1980	64%	36%
1990	72%	28%

Procurando dados na tabela dada, na 3ª linha e 3ª coluna, teremos a porcentagem da população rural no ano de 1980, que é de 36%.

Como você pode perceber, as matrizes estão mais próximas de nós do que imaginamos.

Capítulo 1

MATRIZES

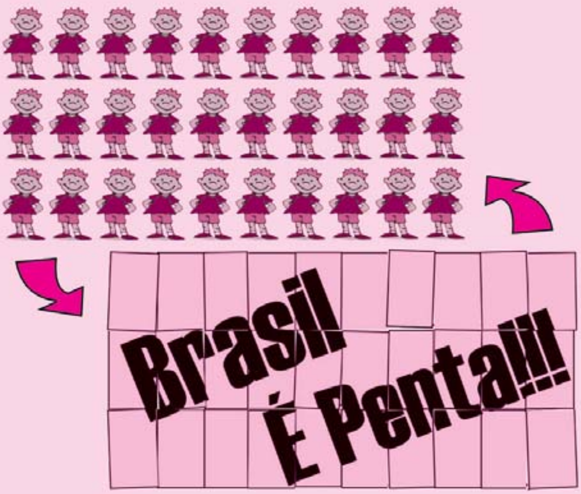
Introdução

As matrizes foram criadas no século XIX pelo matemático e astrônomo inglês Arthur Cayley.

Elas são utilizadas para resolver sistemas lineares, também tendo grande aplicação na Física.

Saiba mais

Quando presenciamos numa festividade um painel humano, conjunto de pessoas em que cada uma tem uma placa contendo a parte da figura correspondente à sua posição, colocando o painel em movimento formando imagens, podemos observar que esse painel é uma tabela de linhas e colunas, formando assim uma matriz.



Noção de Matriz

Uma tabela é definida por matriz quando seus números estão dispostos em linhas e colunas.

Representação:

Uma matriz é representada entre parênteses ou colchetes.

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nas matrizes, as linhas são colocadas de cima para baixo e as colunas da esquerda para a direita.

$$\begin{array}{l c} \text{1ª linha} \Leftarrow & \\ \text{2ª linha} \Leftarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{3ª linha} \Leftarrow & \\ \text{4ª linha} \Leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{1ª coluna} & \text{2ª coluna} & \text{3ª coluna} & \text{4ª coluna} \end{array}$$

Genericamente, as tabelas com m linhas e n colunas são denominadas matrizes m x n.

Tipo de uma Matriz

As matrizes são representadas por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas.

A matriz M do tipo m x n é representada por:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$$\begin{cases} \text{Em que } M = (a_{ij})_{m \times n} \\ i \text{ e } j \text{ representam a linha e a coluna que cada elemento ocupa.} \end{cases}$$

Exemplos:

- a_{31} é o elemento da 3ª linha e da 1ª coluna.
- a_{24} é o elemento da 2ª linha e da 4ª coluna.
- A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_{2x2}$ é do tipo 2 x 2.
- A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{3x2}$ é do tipo 3 x 2.
- A matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{1x3}$ do tipo 1 x 3.

Essa matriz é denominada **matriz linha**, pois apresenta uma única linha.

- A matriz $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}_{3x1}$ é do tipo 3 x 1.

Essa matriz é denominada **matriz coluna**, pois apresenta uma única coluna.

- A matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$ é do tipo 3 x 3.

Consideramos uma **matriz nula** quando todos os seus elementos forem iguais a zero.

Construção de uma Matriz

Partindo da representação genérica de uma matriz, podemos construir qualquer matriz.

Exemplos:

1) Construa a matriz $A = (a_{ij})_{2x3}$, definida por $a_{ij} = i - 2j$.

Solução:

A matriz do tipo 2x3 é representada por $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$

Como $a_{ij} = i - 2j$, temos:

$a_{11} = 1 - 2 \cdot 1 = -1$ (pois $i = 1$ e $j = 1$)

$a_{12} = 1 - 2 \cdot 2 = -3$

$a_{13} = 1 - 2 \cdot 3 = -5$

$a_{21} = 2 - 2 \cdot 1 = 0$

$a_{22} = 2 - 2 \cdot 2 = -2$

$a_{23} = 2 - 2 \cdot 3 = -4$

Assim, temos:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

2) Construa a matriz $C = (c_{ij})_{4x2}$, tal que $c_{ij} = \begin{cases} (-1)^{2i-j}, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Solução:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

$(-1)^{2i-j}$, se $i = j$

$c_{11} = (-1)^{2-1} = -1$

$c_{22} = (-1)^{4-1} = -1$

0, se $i \neq j$

$c_{12} = 0$, $c_{21} = 0$, $c_{31} = 0$, $c_{32} = 0$

$c_{41} = 0$ e $c_{42} = 0$

Assim teremos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

Tipos de Matrizes

Algumas matrizes recebem nomes especiais como matriz linha, matriz coluna e matriz nula, como já vimos.

Veja agora outras matrizes importantes.

Matriz Quadrada

Uma matriz é quadrada quando o número de linhas é igual ao número de colunas. Assim, denominamos a matriz quadrada de ordem n.

Exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$ Leitura: matriz quadrada de ordem 2.

Saiba mais

UTILIZANDO A MATEMÁTICA NOS ESPORTES

É comum as matrizes estarem presentes nos jornais e na televisão.

Um exemplo comum são as tabelas de classificação de um campeonato de futebol.

Observe:

	J	V	E	D	PG	PP
Time X	5	3	1	0	6	3
Time Y	5	2	2	1	5	4
Time Z	5	1	0	4	3	6

Em que,

J: jogos

V: vitórias

E: empates

D: derrotas

PG: pontos ganhos

PP: pontos perdidos

b) $(1)_{1x1}$ Leitura: matriz quadrada de ordem 1.

c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$ Leitura: matriz quadrada de ordem 3.

Diagonal Principal de uma Matriz

São os elementos onde $i = j$, ou seja:

$\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{n,n}\}$

Exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ → diagonal principal

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ → diagonal principal

Diagonal Secundária de uma Matriz

São elementos onde $i + j = n + 1$.

Exemplos:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ → diagonal secundária

b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ → diagonal secundária

Matriz Diagonal

Uma matriz é diagonal quando os elementos da diagonal principal são quaisquer e os elementos que não são da diagonal principal são iguais a 0.

Exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz Identidade

Chama-se matriz identidade a matriz em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais são iguais a 0.

Representamos a matriz identidade por I_n onde n indica a ordem da matriz;

Exemplos:

a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz Oposta ou Simétrica

A matriz oposta é obtida a partir de uma matriz conhecida, trocando o sinal de todos os seus elementos.

Sendo A uma matriz, a oposta será – A.

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $-A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Matriz Transposta

Sendo uma matriz B de ordem m x n, denomina-se matriz transposta de B, indicada por B^t, a matriz n x m, em que as linhas e as colunas são trocadas ordenadamente.

Exemplos:

a) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_{3x2}$ $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}_{2x3}$

b) $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3x1}$ $C^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{1x3}$

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes do mesmo tipo são iguais se cada elemento da primeira matriz for correspondente à segunda matriz.

Exemplos:

1) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ b & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & c \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, se A=B, calcule a, b e c.

Solução:

Se A = B, temos: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ b & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

$a = 3$ $b = 5$ e $c = 1$ (todos os elementos correspondentes são iguais).

2) Determine os valores de x e y sabendo que:

$$\begin{bmatrix} x+y & 3 \\ 5 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

Igualando os elementos correspondentes, temos:

$$\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x \cancel{+y} = 9 \\ x \cancel{-y} = 1 \end{cases}$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

Substituindo $x = 5$ na 1ª equação:

$$x + y = 9$$
$$5 + y = 9$$
$$y = 9 - 5$$
$$y = 4$$

Operações com Matrizes

Soma e Subtração

Uma matriz é obtida pela soma ou pela diferença de matrizes do mesmo tipo, somando ou subtraindo elementos correspondentes.

Exemplos:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+4 & 2-3 \\ 4+8 & -5+3 & -3+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 12 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Obs.:

Neste exemplo, definimos $A - B$ como a soma de A com a oposta de B; isto é: $A - B = A + (-B)$.

c) Determine a matriz X tal que

$$X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 10 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução:

A matriz X é do tipo 3x2.

Descobrimos o valor da matriz X isolando-a como uma equação:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 10 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 10 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 11 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Obs.:

Na soma de matrizes são válidas as propriedades:

$A + B = B + A$	(Propriedade Comutativa)
$A + (B + C) = (A + B) + C$	(Propriedade Associativa)
$A + (-A) = 0$	(Elemento Simétrico)
$A + 0 = A$	(Elemento Neutro)

Multiplicação de um Número Real por uma Matriz

Sendo um número real K e uma matriz A, o produto de K por A será obtido pela multiplicação de K por cada elemento da matriz A.

Exemplos:

1) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $2A - 3B + C$

b) $3A^t - 2C^t$

Solução:

a) $$2A - 3B + C = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -13 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

b) $$3A^t - 2C^t = 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Determine o valor de x e y na igualdade:

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ 5 & y \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} x-6 & 2+18 \\ 5+3 & y+9y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Igualando os termos correspondentes:

$x - 6 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 8$

$10y = 10 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

3) Resolva o sistema matricial:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as equações, temos:

$$2X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Substituindo $X = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$ na 1ª equação:

$$X + Y = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - X$$

$$Y = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 7 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

Se multiplicarmos duas matrizes A e B, o produto só será possível se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.

$$A_{mxp} \cdot B_{pxn} = C_{mxn}$$

Exemplos:

1) É possível efetuar a multiplicação de uma matriz $M = (m_{ij})_{3x2}$ e $N = (n_{ij})_{2x4}$?

É possível multiplicar M · N, pois o número de colunas da matriz M é igual ao número de linhas da matriz N.

$$M_{3x2} \cdot N_{2x4} = A_{3x4}$$

2) Calcule o produto da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solução:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) & 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 4 + (-1)\cdot 3 \\ 0\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 0\cdot 3 + 3\cdot 1 & 0\cdot 4 + 3\cdot 3 \\ -1\cdot 0 + 1\cdot(-2) & -1\cdot 3 + 1\cdot 1 & -1\cdot 4 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -6 & 3 & 9 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Resolva a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:
Inicialmente calcula-se o produto das matrizes do 1º membro:

$$\begin{bmatrix} x - z & y - t \\ 2x - z & 2y - t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x - z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y - t = 0 \\ 2y - t = 3 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, obtemos:
$x = -2$, $z = -3$, $y = 3$ e $t = 3$.

Propriedades da Multiplicação

No produto de matrizes, são válidas as seguintes propriedades, para quaisquer matrizes:

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (Associativa)

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (Distributiva à direita)

$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ (Distributiva à esquerda)

$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ (onde I_n é a matriz identidade)

Obs.:
No produto de matrizes não é válida a propriedade comutativa, existem matrizes A e B tais que A· B ^{1} B · A. Se ocorrer AB = BA, dizemos que as matrizes A e B comutam.

Potenciação

Dada uma matriz quadrada A, então:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots\ldots \cdot A}_{\text{n vezes}}$$

Exemplo:

Calcule A^2 e A^3, sabendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Solução:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa

Considerando uma matriz quadrada A, de ordem n, define-se matriz inversa da matriz quadrada A, a matriz A^{-1}, tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

Exemplos:

1) Calcule A · B e B · A, sabendo que $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Solução:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 1 & (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $A \cdot B = I_2$ e $B \cdot A = I_2$, logo $A \cdot B = B \cdot A = I_2$. Assim, dizemos que A e B são matrizes inversas.

2) Determine a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

Fazendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ e aplicando a relação $A \cdot A^{-1} = I_2$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x + 5z & 2y + 5t \\ x + 3z & y + 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, obtemos os sistemas:

$$\begin{cases} 2x + 5z = 1 \\ x + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2y + 5t = 0 \\ y + 3t = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, obtemos:

$x = 3$, $y = -5$, $z = -1$ e $t = 2$

Logo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para verificar se o resultado está certo, efetuamos $A \,.\, A^{-1}$ e devemos obter a identidade I_2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 + 5 \cdot (-1) & 2 \cdot (-5) + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot (-5) + 3 \cdot (2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso, A e A^{-1} são matrizes inversas.

Propriedades da Matriz Inversa

São válidas as seguintes propriedades:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

c) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Exemplo:

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e X, matrizes inversíveis de ordem n.

Determine X, sabendo que $(X \cdot A)^{-1} = B$.

Solução:

Aplicando a propriedade da matriz inversa, obtemos:

$(X \cdot A)^{-1} = B \;\; \Rightarrow \;\; A^{-1} \cdot X^{-1} = B$

em que $X = (A \,.\, B)^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

Calculando a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes, obtemos os sistemas.

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2a + 2c = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2b + d = 0 \\ 2b + 2d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, obtemos:

$a = 1$, $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = -1$ e $d = 1$

Portanto $X = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Capítulo 2

DETERMINANTES

A teoria dos determinantes surgiu quase simultaneamente na Alemanha e no Japão.

Ela foi desenvolvida por dois matemáticos, Leibniz (1646-1716) e Seki Shinsuke Kowa (1642-1708), ao solucionarem um problema de eliminações necessárias à resolução de um sistema de n equações lineares com n incógnitas.

Depois vieram, em ordem cronológica, os trabalhos de Cramer, Bezout, Laplace, Vandermonde, Lagrange, Cauchy e Jacobi.

Dada uma matriz quadrada de ordem n, podemos associar um único número real a essa matriz, que chamaremos determinante dessa matriz.

Indicação:

Determinante da matriz A: **det A.**

Determinante de uma Matriz Quadrada de 1ª Ordem

$\det A = |a_{11}| = a_{11}$

Em que o determinante de A é o próprio elemento da matriz.

Exemplos:

$\det A = |-3| = -3$

$\det B = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

Determinante de uma Matriz Quadrada de 2ª Ordem

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, então:

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

O determinante da matriz A é obtido multiplicando os elementos da diagonal principal subtraído da multiplicação dos elementos da diagonal secundária.

Exemplos:

a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -7$

b) $\det M = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 2\,(-3) = 6$

Determinante de uma Matriz Quadrada de 3ª Ordem

Para calcular o determinante de uma matriz de 3ª ordem, podemos aplicar várias regras.

Regra de Sarrus

Considerando a matriz quadrada de 3ª ordem:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Repete-se, à direita, a 1ª e a 2ª coluna:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

Det $A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

Exemplo:

Calcule o determinante da matriz M, sendo;

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solução:

Repetindo a 1ª e a 2ª coluna, temos:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}$$

det M = $0 \cdot 4 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \cdot 3 - (-1) \cdot 3 \cdot 4 =$

det M = $0 + 2 + 18 - 8 - 0 + 12$

det M = 24

Teorema de Laplace

Para calcular um determinante de 3ª ordem podemos escolher uma linha ou uma coluna. Para isso definimos **menor complementar** e **cofator**.

Menor Complementar

Dada uma matriz A, de ordem $n \geq 2$, e a_{ij} um elemento de A, definimos menor complementar de a_{ij} o determinante D_{ij} obtido ao eliminarmos a linha e a coluna em que esse elemento se encontra.

Exemplo:

$$\text{Sendo } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

- o menor complementar de a_{11} é dado por:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$D_{11} = -8 - 3$

$D_{11} = -11$

- o menor complementar de a_{23} é dado por:

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$D_{23} = 6 - 0$

$D_{23} = 6$

Cofator

Chamamos de cofator de um elemento a_{ij} (representado por A_{ij}) o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplo:

Calcule os cofatores de a_{21} e a_{33} da matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Solução:

Eliminando a linha e a coluna em que a_{21} se encontra:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot (0 + 1)$$
$$A_{21} = -1$$

Eliminando a linha e a coluna em que a_{33} se encontra:

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot (24 - 0)$$
$$A_{33} = 24$$

Aplicação do Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz é obtido pela soma dos elementos de uma de suas linhas ou colunas pelos seus respectivos cofatores.

Exemplo:

1) Calcule o determinante da seguinte matriz, utilizando o teorema de Laplace.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Solução:

Escolhemos, por exemplo, a primeira linha e calculamos os cofatores de seus elementos.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{2} \cdot (-12 + 5)$$

$$A_{11} = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{3} \cdot (-6 - 3)$$

$$A_{12} = 9$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{4} \cdot (-10 - 12)$$

$$A_{13} = -22$$

Pelo teorema temos:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$\det A = 3 \cdot (-7) + (-1) \cdot 9 + 0\,(-22)$$

$$\det A = -21 - 9$$

$$\det A = -30$$

Obs.:

É conveniente na aplicação do teorema de Laplace escolhermos uma linha ou uma coluna que tenha maior número de zeros, pois, como no exemplo anterior, não era necessário calcular o cofator A_{13}.

Na aplicação da fórmula, o resultado $a_{13} \cdot A_{13} = 0$. Podemos aplicar o teorema de Laplace nos determinantes de uma matriz quadrada de ordem maior ou igual a 3.

Exemplo:

Calcule o determinante da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Solução:

É conveniente escolher a 1ª coluna, pois apresenta maior número de zeros. Calculando o cofator A_{11}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante pela regra de Sarrus, obtemos:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 3 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 4 & 5 \end{array}$$

$\det = -\cancel{8} + 36 - 5 + \cancel{8} - 60 + 3$

$\det = -26$

Portanto,

$\det A = a_{11} \cdot A_{11}$

$\det A = 1 \cdot (-26)$

$\det A = -26$

$A_{11} = (-1)^2 \cdot (-26)$

$A_{11} = -26$

Propriedades dos Determinantes

1) Um determinante é nulo quando:

- Tem uma linha ou coluna igual a zero.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \Rightarrow L_2 \end{array} = 0$, pois L_2 é uma linha de zeros.

b) $\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & \Uparrow & \\ & C_2 & \end{array} \end{array} = 0$, pois C_2 é uma coluna de zeros.

- Tem duas linhas ou colunas iguais.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow L_1 \\ \\ \Rightarrow L_3 \end{array} = 0$, pois $L_1 = L_3$

b) $\begin{array}{cccc} & C_2 & & C_4 \\ & \Downarrow & & \Downarrow \end{array}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$, pois $C_2 = C_4$

- Tem duas linhas ou colunas proporcionais.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$, pois $L_2 = 3 \cdot L_1$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 10 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$, pois $C_3 = 2 \cdot C_1$

- Tem uma linha (ou coluna) que é igual a uma combinação linear das demais linhas (ou colunas).

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$, pois $L_1 + L_2 = L_3$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, pois $C_3 = \dfrac{C_1 + C_2}{2}$

2) Um determinante muda de sinal quando trocamos de lugar, entre si, duas linhas ou duas colunas da matriz.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -41$$

Trocando a primeira coluna com a terceira, vem:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 41$$

3) Quando se multiplica (ou se divide) uma linha ou uma coluna de um determinante por um número, o novo determinante fica multiplicado (ou dividido) por esse número.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Multiplicando a 2ª linha por 2, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 = 12$$

4) Teorema de Binet

Sendo A e B duas matrizes quadradas, de mesma ordem, então det $(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

det (A · B) = (det A) · (det B)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7$$

det (A · B) = 7 · (– 7)

det (A · B) = – 49

5) O determinante de uma matriz que tem os elementos abaixo ou acima da diagonal principal é o produto dos elementos dessa diagonal.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 3 = -6$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$

6) O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

$$\det (A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 35$$

$$\det (A^t) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 35$$

7) O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, em que todos os elementos abaixo ou acima da diagonal secundária são iguais a zero, é o produto dos elementos dessa diagonal pelo fator $(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot(-1)^{\frac{3\cdot(3-1)}{2}} = 6\cdot(-1)^{3} = -6$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot 4\cdot 1\cdot(-1)^{\frac{4\cdot(4-1)}{2}} = (-24)\cdot(-1)^{6} = -24$

8) Se A é uma matriz quadrada com determinante diferente de zero (A é inversível), então $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Exemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -60$$

Como $\det A \neq 0$, então $\det A^{-1} = \dfrac{1}{-60} = -\dfrac{1}{60}$

9) Sendo A uma matriz quadrada de ordem n e k um número real, então:
$\det(K\cdot A) = K^{n}\cdot \det A$

Exemplo:

Se A é uma matriz quadrada de ordem 4 e $\det(A) = 3$, calcule $\det(2A)$.

$\det(K\cdot A) = K^{n}\cdot \det A$
$\det(2\cdot A) = 2^{4}\cdot 3 = 48$

Teorema de Jacobi

Aplicamos o teorema de Jacobi quando a uma linha (ou uma coluna) de uma matriz adicionarmos uma combinação linear das demais linhas (ou colunas) e o determinante dessa matriz não se altera.

Exemplo:

$$\text{Sendo } M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 16$$

Se multiplicarmos a primeira linha por 2, e a segunda linha por 3 e adicionarmos à terceira linha, obteremos a matriz:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 15 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A terceira linha de N é a combinação linear das linhas 1 e 2. Pelo teorema de Jacobi, temos:

$\det N = 16$

Regra de Chió

Aplicamos a regra de Chió em matrizes de ordem $n \geq 2$ em que pelo menos um elemento seja igual a 1.

Exemplo:

$$\left|\begin{array}{c:cc} 1 & 2 & 3 \\ \hdashline 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{array}\right|$$

Solução:

Inicialmente, isolamos a primeira linha e a primeira coluna.

De cada um dos elementos restantes subtraímos o produto dos elementos isolados correspondente à linha e à coluna em que o elemento está representado:

$$\begin{vmatrix} -1-2\cdot 3 & 2-3\cdot 3 \\ 0-2\cdot 1 & -3-3\cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -7 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$$

Multiplicamos o determinante obtido por $(-1)^{i+j}$.

Como isolamos a 1ª linha e a 1ª coluna, obtemos:

$$(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -7 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^2 \cdot (42 - 14) = 28$$

Resolução de Equações envolvendo Determinantes

Exemplos:

Determine o conjunto verdade das equações:

a) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Solução:

Resolvendo o determinante, obtemos:

$$-2x - 6 = 0$$
$$-2x = 6$$
$$2x = -6$$
$$x = \frac{-6}{2}$$
$$x = -3$$

$S = \{-3\}$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & x \\ 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$

$$0 + 6x + 0 - 0 - 0 - 48 = 6$$
$$6x = 54$$
$$x = 9$$

$S = \{9\}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 48$

Aplicando uma das propriedades de determinantes, obtemos:
Devemos multiplicar os elementos da diagonal principal e igualar a 48.

$2 \cdot x \cdot 3 \cdot 4 = 48$

$24x = 48$

$x = \dfrac{48}{24}$

$x = 2$ $\qquad$ $S = \{2\}$

Obs.:

Podemos obter a matriz inversa com o auxílio dos determinantes.

A matriz inversa A^{-1} de uma matriz A existe se, e somente se, $\det A \neq 0$ e é dado por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$$

Matriz Adjunta

Matriz adjunta da matriz A é a transposta da matriz dos cofatores da matriz A.

$\text{adj } A = (\overline{A})'$

Exemplo:

Calcule, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, aplicando a fórmula

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det \cdot A} . \text{adj } A$

Solução:

Calculando o det A, obtemos:

$\text{Det } A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

$\text{Det } A = 8 - 0$

$\text{Det } A = 8 \neq 0$

Portanto $\exists\, A^{-1}$.

Calculando os cofatores dos elementos de A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$
$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 0 = 0$
$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$
$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$

Assim:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

adj $A = (\bar{A})$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Substituindo os dados na fórmula,

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

SISTEMAS LINEARES

O primeiro matemático a resolver problemas que recaem em equações da forma $ax + by = c$, em que a e b são números inteiros simultaneamente não-nulos, foi Diofanto de Alexandria.

Equação Linear

Equação linear é toda equação na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b_1$, em que:

$a_1, a_2, a_3, ...,$ são coeficientes;

$x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas;

b_n é o termo independente.

Exemplo:

$3x - 2y - z = 2$ é uma equação linear, em que

x, y e z são as incógnitas;

3, – 2, – 1 são os coeficientes;

2 é o termo independente;

(2, –1, 6) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 2 - 2(-1) - 6 = 2$.

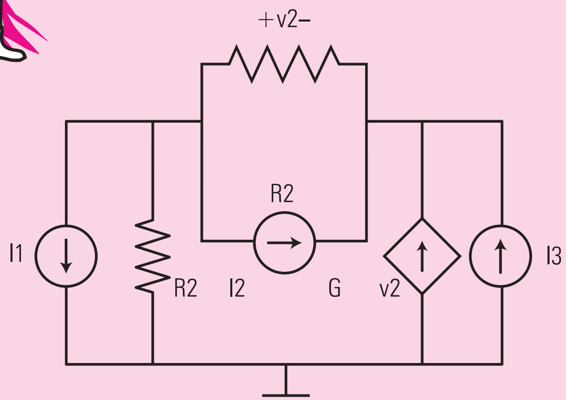
Sistemas Lineares

Um sistema de equações linear é formado apenas por equações do tipo:

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$

Saiba mais

Na Física, dado um circuito elétrico para determinarmos as intensidades das correntes elétricas i_1, i_2 e i_3, são obtidas três equações com três incógnitas, aplicando assim um sistema linear.



Exemplos:

a) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ é um sistema linear

b) $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -a - b + 2c = 3 \\ a + 2b - c = 2 \end{cases}$ é um sistema linear

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$ não é um sistema linear

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ não é um sistema linear

Solução de um Sistema Linear

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

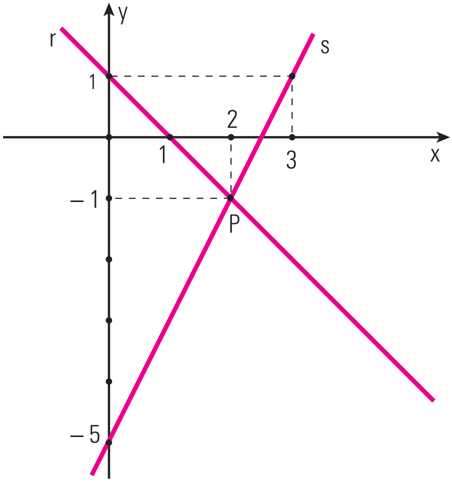
Saiba mais

Podemos utilizar um sistema de equações matemáticas no balanceamento de uma equação química.

Exemplo:

$2C_3H_6 + 9O_2 \Rightarrow 6CO_2 + 6H_2O$

Representamos na reta r a equação $x + y = 1$ e a reta s a equação $2x - y = 5$ no plano cartesiano:



As retas r e s se interceptam no ponto P (2, – 1). Logo (2, – 1) é solução do sistema.

Exemplo:

Dado o sistema S $\begin{cases} a - b + c = 3 \\ 2a + b - c = 0 \\ 3a - b + 2c = 6 \end{cases}$

Verifique se (1, – 1, 1) é solução de S.

Solução:

Substituindo no sistema $a = 1$, $b = -1$ e $c = 1$, obtemos:

$1 - (-1) + 1 = 3$ (V)

$2.1 - 1 - 1 = 0$ (V)

$3.1 - (-1) + 2 \cdot 1 = 6$ (V)

Portanto (1, – 1, 1) é solução do sistema.

Uma seqüência de números reais (a, b, c, ... n) é solução de um sistema linear se é solução de todas as equações do sistema.

Matrizes Associadas a um Sistema Linear

Dados os sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Podemos representá-los na forma matricial. Assim:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{representada} \\ \text{pelos coeficientes} \\ \text{das incógnitas}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{coluna} \\ \text{representada} \\ \text{pelas incógnitas}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{coluna} \\ \text{representada} \\ \text{pelos termos} \\ \text{independentes}}}$$

Sistema Homogêneo

Sistema linear homogêneo é aquele que possui todos os termos independentes nulos:

$$\begin{cases} a + b = \boxed{0} \\ -a + 2b = \boxed{0} \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + z = \boxed{0} \\ x + 3z = \boxed{0} \\ y - z = \boxed{0} \end{cases}$$

A seqüência (0, 0, 0, ... 0) recebe o nome de solução trivial ou imprópria.

Um sistema homogêneo é classificado em:

- **Possível e determinado** se a solução trivial é única.
- **Possível e indeterminado** se a solução trivial não é a única.

Sistemas Lineares Equivalentes

Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes se admitem a mesma solução.

Exemplos:

1) Verifique se são equivalentes os sistemas $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a-b=8 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3a-b=11 \\ 2a-b=8 \end{cases}$

Solução:

Resolvendo os sistemas $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a-b=8 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3a-b=11 \\ 2a-b=8 \end{cases}$, verificamos que o par ordenado (3,– 2) é solução dos dois.

Portanto, eles são equivalentes.

2) Calcule a e b, de modo que sejam equivalentes os sistemas:

$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax+by=-3 \\ -2ax-by=1 \end{cases}$

Solução:

Resolvendo o sistema, obtemos:

$\begin{cases} x+\cancel{y}=3 \\ x-\cancel{y}=1 \end{cases}$

$2x = 4$

$x = \dfrac{4}{2}$

$x = 2$

Substituindo $x = 2$, na 1ª equação:

$x + y = 3$

$2 + y = 3$

$y = 3 - 2$

$y = 1$

Como os sistemas são equivalentes, podemos substituir $x = 2$ e $y = 1$ em:

$$\begin{cases} ax + by = -3 \\ -2ax - by = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a \cancel{+b} = -3 \\ -4a \cancel{-b} = 1 \end{cases}$$

$$-2a = -2$$

$$2a = 2$$

$$a = 1$$

Substituindo $a = 1$ em $2a + b = -3$, temos:

$2 \cdot 1 + b = -3$

$b = -3 - 2$

$b = -5$

Sistema Normal

Dizemos que um sistema é normal se o número de incógnitas é igual ao número de equações e o determinante é $\neq 0$.

Exemplo:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

Solução:

O número de equações do sistema é igual ao número de incógnitas (x e y). Calculando o determinante:

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

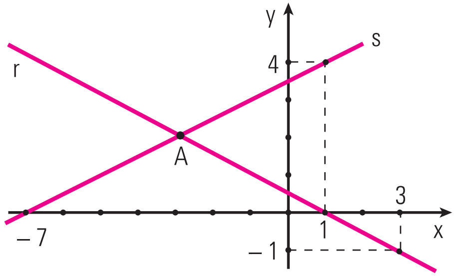
$\det = -1 - 2$

$\det = -3 \neq 0$

Portanto, o sistema é normal.

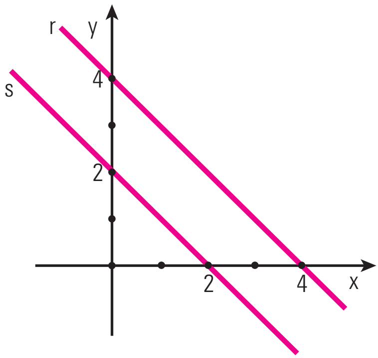
Classificação de um Sistema

Observe os exemplos representados graficamente:



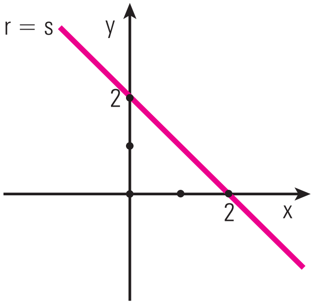
$$\text{I} - \begin{cases} r: \quad x + 2y = 1 \\ s: -x + 2y = 7 \end{cases}$$

O ponto A (– 3, 2) representa a intersecção da reta r e s.



$$\text{II} - \begin{cases} r: x + y = 4 \\ s: x + y = 2 \end{cases}$$

As retas r e s são paralelas, não possuem ponto comum (não há solução).



$$\text{III} - \begin{cases} r: 3x + 3y = 6 \\ s: \quad x + y = 2 \end{cases}$$

As retas r e s são coincidentes, possuem infinitos pontos em comum (há infinitas soluções).

Resumindo

Um sistema é:

Possível e determinado quando a solução do sistema é única (I).

Possível e indeterminado quando admite infinitas soluções (III).

Impossível quando não admite solução (II).

Regra de Cramer

Regra de Cramer é um método prático para resolver um sistema, em que a solução será:

$$x = \frac{Dx}{D},\ y = \frac{Dy}{D},\ z = \frac{Dz}{D},\ ...$$

Exemplos:

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$

Solução:

- Inicialmente, colocamos o sistema na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Resolvemos o determinante formado pelos coeficientes das incógnitas.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$D = -3 - 2$$
$$D = -5$$

Para calcularmos o D_x, trocamos a coluna da incógnita x pelos termos independentes:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = -3 + 8$$
$$D_x = +5$$

Para calcularmos o D_y, trocamos a coluna da incógnita y pelos termos independentes:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$D_y = -4 - 1$

$D_y = -5$

Por Cramer, temos:

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad\qquad y = \frac{Dy}{D}$$

$$x = \frac{+5}{-5} \qquad\qquad y = \frac{-5}{-5}$$

$$x = -1 \qquad\qquad y = 1$$

Logo:

$S = \{(-1, 1)\}$

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z - 1 = 0 \\ y + z = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x + z = 1$

Solução:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$D = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 1$

$D = -2$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$D_x = 0 + 0 + 2 - 0 - 3 - 1$

$D_x = -2$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$D_y = 1 + 0 + 0 - 0 - 2 - 3$

$D_y = -4$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$D_z = 0 + 3 + 0 - 0 - 1 - 2$

$D_z = 0$

Por Cramer, temos:

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad y = \frac{Dy}{D} \qquad z = \frac{Dz}{D}$$

$$x = \frac{-2}{-2} \qquad y = \frac{-4}{-2} \qquad z = \frac{0}{-2}$$

$$x = 1 \qquad y = 2 \qquad z = 0$$

Logo:

$S = \{(1, 2, 0)\}$

Podemos classificar esses dois sistemas como Sistemas Possíveis Determinados.

c) $\begin{cases} -x - y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Solução:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = -1 + 1 \qquad D_x = 3 + 4$$

$$D = 0 \qquad D_x = 7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D_y = -4 - 3$$

$$D_y = -7$$

Por Cramer, temos:

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad y = \frac{Dy}{D}$$

$$x = \frac{7}{0} \qquad y = \frac{-7}{0}$$

impossível

Logo: $S = \emptyset$

Classificamos esse sistema como Sistema Impossível.

d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = 2 - 2 \qquad D_x = 6 - 6$$

$$D = 0 \qquad D_x = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 6 - 6$$

$$D_y = 0$$

Por Cramer, temos:

$x = \frac{0}{0}$ e $y = \frac{0}{0}$ (admite infinitas soluções)

Sistema Possível e Indeterminado.

Discussão de um Sistema Linear

Discutir um sistema é verificar se o sistema é possível determinado, indeterminado ou impossível.

- **Sistema Possível Determinado** $\Rightarrow D \neq 0$
  (admite uma única solução).

- **Sistema Possível Indeterminado** $\Rightarrow D = 0,\ D_x = 0,\ D_y = 0 \ldots$
  (admite infinitas soluções).

- **Sistema Impossível** $\Rightarrow D = 0$ e pelo menos um dos demais det $\neq 0$
  (não admite solução).

Exemplos:

Discuta os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} -x + my = 3 \\ mx - y = 1 \end{cases}$

Solução:

$$\begin{pmatrix} -1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & m \\ m & -1 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} 3 & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D = 1 - m^2 \qquad D_x = -3 - m$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ m & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_y = -1 - 3m$$

Discussão:

SPD $\Rightarrow 1 - m^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad m \neq \pm 1$

(Sistema Possível Determinado)

SPI $\Rightarrow 1 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m \pm 1$

Substituindo $m = \pm 1$ em D_x e D_y, verificamos que $D_x \neq 0$ e $D_y \neq 0$. Logo, $\nexists$ m para que o sistema seja indeterminado.

SI $\Rightarrow m = \pm 1$

Substituindo $m = \pm 1$ em D_x e D_y, verificamos que $D_x \neq 0$ e $D_y \neq 0$. Logo, para o sistema ser impossível, $m = \pm 1$.

b) $\begin{cases} x + 2y + 2z = m \\ 3x + 6y - 4z = 4 \\ 2x + ny - 6z = 1 \end{cases}$ Determine m e n para que o sistema seja indeterminado.

Solução:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & n & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & n & -6 \end{vmatrix}$$

$D = -\cancel{36} + 6n - 16 - 24 + 4n + \cancel{36}$

$D = 10n - 40$

$$D_x = \begin{vmatrix} m & 2 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 1 & n & -6 \end{vmatrix}$$

$D_x = -36m + 8n - 8 - 12 + 4mn + 48$

$D_x = -36m + 8n + 4mn + 28$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 3 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

$D_y = -24 + 6 - 8m - 16 + 4 + 18m$
$D_y = 10m - 30$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & n & 1 \end{vmatrix}$$

$D_z = \cancel{6} + 3mn + 16 - 12m - 4n - \cancel{6}$
$D_z = -12m - 4n + 3mn + 16$

S.P.I.

$10n - 40 = 0$
$10n = 40$
$n = 4$

$10m - 30 = 0$
$10m = 30$
$m = 3$

Substituindo $m = 3$ e $n = 4$ em D_x, D_y e D_z, concluímos que $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$ e $D_z = 0$.

Portanto, $m = 3$ e $n = 4$.

Sistema Retangular

É aquele cujo número de equações é diferente do número de incógnitas.

Discussão de um Sistema Retangular

Quando o número de equações for maior que o número de incógnitas, devemos escolher duas e resolver o sistema.

Classificação de um Sistema Retangular

Sistema possível e determinado

Exemplo:

Seja o sistema $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

Se escolhermos a 1ª e 2ª equações e resolvermos o sistema, teremos $x = 2$ e $y = 3$.

Substituindo $x = 2$ e $y = 3$ na 3ª equação: $3 \cdot 2 + 3 = 9$ (V)

A solução (2, 3) é também solução da equação $3x + y = 9$; neste caso, o sistema será possível e determinado.

Sistema possível e indeterminado

Exemplo:

O sistema $\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + y = -3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$ é indeterminado.

Tanto $\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + y = -3 \end{cases}$, como $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$,

como $\begin{cases} -x + y = -3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$ são indeterminados.

Sistema Impossível

Exemplo:

O sistema $S \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 2 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$ é impossível.

Resolvendo o sistema $S \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$, concluímos que não admite solução, portanto ele é impossível.

Logo S também será.

Sistema Não-Linear

Definimos como sistema não-linear aquele em que pelo menos uma equação não é linear.

Equação não-linear é toda equação que apresenta pelo menos uma variável com grau maior que 1 ou apresenta produto de variáveis.

Exemplo:

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 - 4y = -1 \end{cases}$$

Solução:

Podemos resolver o sistema por algum método já conhecido. Isolando x na 1ª equação e substituindo na 2ª, obtemos:

$x = 2y$

$(2y)^2 - 4y = -1$

$4y^2 - 4y + 1 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$

$\Delta = 0$

$$y = \frac{4 \pm 0}{8}$$

$$y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$$

Substituindo $y = \frac{1}{2}$ em $x = 2 \cdot \frac{1}{2}$, obtemos:

$x = 1$

Logo, a solução será $\left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Construa as seguintes matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{2x3}$ com $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

b) $A = (a_{ij})_{3x2}$ com $a_{ij} = \begin{cases} i^j \text{ se } i \geq j \\ -3 \text{ se } i = j \end{cases}$

c) $B = (b_{ij})_{3x3}$ com $b_{ij} = -i^2 - j$

d) $C = (c_{ij})_{1x4}$ com $c_{ij} = i - 2ij + 3j$

2) Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2x2}$, sendo $a_{ij} = i^2$ e $B = (b_{ij})_{2x2}$, sendo $b_{ij} = i + j$, determine:

a) $b_{12} - a_{11}$ b) $2a_{12} + b_{22}^2$

3) Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & b \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ c & 3 & 2 \end{pmatrix}$, calcule a, b, e c, sabendo que $B = A^t$.

4) Determine os números reais x e y, tais que:

a) $\begin{pmatrix} x-1 & 3 \\ 4 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3^y & 4 \\ -1 & \log_x^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x-y & -5 \\ 3 & 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

5) Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, determine $X = A + 3B^t$.

6)(CISESP-PE) Dadas as matrizes reais $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, em que $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$, tais que $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i - j + 1$, indique a alternativa correspondente ao elemento c_{22} da matriz $C = A \cdot B$.

a) 40 b) 36 c) 4 d) 120 e) 22

7) (FATEC-SP) Uma indústria automobilística produz carros X e Y nas versões standard, luxo e superluxo. Na montagem desses carros são utilizadas as peças A, B e C.

Para um certo plano de montagem, são dadas as seguintes informações:

	Carro X	Carro Y
Peça A	4	3
Peça B	3	5
Peça C	6	2

	Standard	Luxo	Superluxo
Carro X	2	4	3
Carro Y	3	2	5

Em termos matriciais, temos:

$$\text{matriz peça/carro} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{matriz carro/versão} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Então, a matriz peça/versão é:

a) $\begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 28 & 34 \\ 18 & 28 & 22 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 22 & 34 \\ 18 & 28 & 28 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 34 & 22 \\ 18 & 28 & 28 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 28 & 28 \\ 18 & 34 & 22 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 22 & 28 \\ 18 & 34 & 28 \end{pmatrix}$

8) Resolva a equação matricial $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

9) Efetue as multiplicações:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

10) Calcule a de modo que as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & a \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ sejam comutativas.

11) Considere as matrizes:

$A = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & x \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Determine x e y, sabendo que: $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

12) (UCS-BA) A equação matricial $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

é verdadeira se x, y e z são tais que $x + y + z$ é igual a:

a) –3 b) –1 c) 0 d) 1 e) 3

13) Determine a matriz inversa das matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

14) Dadas as matrizes $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, determine $(M \cdot N^{-1})^t$:

15) Calcule o valor dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \log_2^4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \text{sen } a & \cos a \\ -\cos a & \text{sen } a \end{vmatrix}$

16) Sendo $A = (a_{ij})_{2x2}$, em que $a_{ij} = 3i + j$ e $B = (b_{ij})_{2x2}$, e $b_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i = j \\ -1 \text{ se } i \neq j \end{cases}$,

calcule o valor dos determinantes:

a) A b) B c) $A^t + B^t$ d) $(A \cdot B)^t$

17) Aplicando a regra de Sarrus, calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

18) Aplicando o teorema de Laplace, calcule o valor dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

19) Calcule o valor dos determinantes a seguir, sem desenvolvê-los. Justifique a resposta:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

20) Determine o conjunto-verdade das equações:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = 1$ b) $\begin{vmatrix} x^2-1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} x & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -15 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ (Mauá)

21) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, calcule os cofatores de A_{11}, A_{21} e A_{33}.

22) Seja a matriz $B = (b_{ij})$ de ordem 3, em que $b_{ij} = \begin{cases} i-j, \text{ se } i>j \\ -1, \text{ se } i<j \\ i+j, \text{ se } i=j \end{cases}$, calcule o valor do determinante de B.

23) (Unifor – CE) A inequação $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0$ tem por conjunto solução:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ ou } x < 0\}$
c) $\mathbb{R}$
d) $\varnothing$

24) (PUC–SP) O determinante $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ representa o polinômio:

a) $-2x^3 + x^2 + 3$
b) $-2x^3 - x^2 + 3$
c) $3x^3 + x - 2$
d) $2x^3 - x^2 - 3$
e) $2x^3 - x^2 + 3$

25) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule det (A.B).

26) Sendo A e B matrizes quadradas de ordem 3, com det A = 2 e det B = 3, calcule:

a) det (3A)

b) det (A · B)

27) Dado o sistema $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$, verifique se é solução cada um dos pares:

a) (– 2, 8)

b) (– 1, 2)

28) Verifique quais dos sistemas são normais:

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ x - y + 2z = -4 \end{cases}$

29) Resolva, com o auxílio da regra de Cramer, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = -5 \\ 2x + y + z = -1 \\ 4x + 2y - z = -11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x + 3y - 4z = 2 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$

30) Classifique os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x + 4y = 4 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ 5x + 2y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$

31) (UF-PA) O valor de K para que os sistemas $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} Kx + 3y = 5K \\ -x - Ky = -11 \end{cases}$

sejam equivalentes é um valor pertencente ao intervalo:

a) $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$
b) $[0, \sqrt{3}]$
c) $[3, 3\sqrt{3}]$
d) $]3, 3\sqrt{3}]$
e) $]-\sqrt{3}, 0]$

32) (FUVEST-SP) Para quais valores de a o sistema linear

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = a \\ \quad - y - 2z = a^2 \end{cases}$ admite solução?

33) (UC-MG) O valor de m para que o sistema $\begin{cases} mx + y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$

seja indeterminado é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

34) Determine K, de modo que o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ Kx + y = 4 \end{cases}$ seja impossível.

35) (MACK-SP) $\begin{cases} x + y = -z \\ 2x + z = 3y \\ 9y + z = -4x \end{cases}$ de variáveis x, y e z:

a) não é homogêneo;
b) apresenta três soluções distintas;
c) é impossível;
d) é possível e indeterminado;
e) é possível e determinado.

36) (UNESP-SP) Para quais valores reais de p e q o sistema

$\begin{cases} 3x + py + 4z = 0 \\ x + y + 3z = -5 \\ 2x - 3y + z = q \end{cases}$ não admite solução?

a) $p = -2$ e $q = 5$
b) $p > -2$ e $q \neq 4$
c) $p = q = 1$
d) $p = -2$ e $q \neq 5$
e) $p = 2$ e $q = 5$

37) Determine o valor de a para que o sistema

$\begin{cases} (a+3)x + 2y = 8 \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$ seja possível e indeterminado.

Respostas

1) a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 \\ -10 & -11 & -12 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2) a) 2

b) 18

3) $\begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$

4) a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

5) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 1 & 10 & 15 \end{pmatrix}$ 6) a 7) b

8) $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ ou $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

9) a) $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -18 & 41 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$

10) $a = 0$ 11) $\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$ 12) d

13) a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\nexists\ B^{-1}$ c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -2 \end{pmatrix}$

15) a) – 14 b) – 7 c) 5 d) 1

16) a) –3 b) –1 c) –4 d) 3

17) a) 122 b) 0 c) 4

18) a) 42 b) –6 c) 72

19) a) 0 ($L_1 = 0$)
b) 0, pois $C_1 = C_3$
c) 0, pois $L_3 = 2L_1 + L_2$
d) 0, pois $C_2 = 2C_1$
e) –24
f) 0, pois $2L_1 + L_2 = L_4$

20) a) $\{1\}$ b) $\{\pm\sqrt{3}\}$ c) $\{-6, 2\}$

21) $A_{11} = -3$
$A_{21} = +6$
$A_{33} = -1$

22) 65 23) a 24) a 25) 288

26) a) 54 b) 6 27) a 28) a, b e d

29) a) $S = \{(1, -1)\}$ b) $\{-2, 0, 3\}$ c) $\{(1, 4, 3)\}$

30) a) S.P.D. b) S.P.I. c) S.I. d) S.P.D.

31) c 32) $a = 1$ ou $a = -2$

33) e 34) $K = \frac{3}{2}$ 35) e

36) e 37) $a = 1$