# UNIDADE VI – LOGARITMO

## Por que aprender Binômio de Newton?

Binômio de Newton é uma ferramenta matemática desenvolvida por Isaac Newton que facilita certos cálculos matemáticos que seriam trabalhosos pelo processo convencional.

## Onde usar os conhecimentos sobre Binômio de Newton?

*As descobertas de Newton são importantíssimas nos dias de hoje para fabricação de motores, para a previsão do curso das naves espaciais, para os cálculos da economia, programas de computação etc.*

## Capítulo 1

## FATORIAL/NÚMEROS BINOMIAIS E BINÔMIO DE NEWTON

Físico e matemático inglês, Isaac Newton generalizou o estudo do binômio para expoentes racionais. Devido a essa expansão, o binômio passou a chamar binômio de Newton.

Os coeficientes que aparecem no desenvolvimento de um binômio são os números binomiais, que formam o triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{l}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5} \\
\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}
\end{array}$$

## Fatorial

Fatorial de um número inteiro e não negativo n se define como sendo a expressão:

$n! = n(n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot (n - 4) \ldots 2 \cdot 1$

Indicação: n! (n fatorial)

Exemplos:

a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

b) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$

d) $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362.880$

**Obs.:**

Definimos: $0! = 1$

$1! = 1$

Convém notar que:

$7 = 7 \cdot 6!$
$9 = 9 \cdot 8 \cdot 7!$

$n! = n \cdot (n - 1)!$
$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$
$(n - 2)! = (n - 2) \cdot (n - 3)!$

Podemos desenvolver o fatorial até que ele se torne conveniente para resolvermos um exercício.

### Saiba mais

Algumas calculadoras científicas possuem a tecla n!.

Podemos observar que a utilização da tecla n! pode nos ajudar na resolução de fatoriais e na resolução de problemas envolvendo Análise Combinatória.

Exemplos:

1) Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{7!}{5!}$

Solução:

$\dfrac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 42 \Rightarrow$ Desenvolvemos 7! até 5! e simplificamos com denominador.

b) $\dfrac{3!\,6!}{4!}$

$\dfrac{3!\,6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}}$

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 180$

c) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

$\dfrac{n(n-1)\,.\,\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n\,(n-1)$

d) $\dfrac{n\,(n+2)!}{(n+3)!}$

$\dfrac{n\,\cancel{(n+2)!}}{(n+3)\cdot\cancel{(n+2)!}} = \dfrac{n}{n+3}$

e) $\dfrac{n!\,(n-1)!}{(n-2)!\cdot(n+1)!}$

$\dfrac{\cancel{n}\,(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-2)!}\cdot(n+1)\,\cancel{n}\,\cancel{(n-1)!}}$

$\dfrac{n-1}{n+1}$

f) $\dfrac{n!-(n+1)!}{(n-1)!}$

$\dfrac{n\cdot(n-1)!-(n+1)\cdot n\,(n-1)!}{(n-1)!}$

$\dfrac{n\,\cancel{(n-1)!}\;[1-(n+1)]}{\cancel{(n-1)!}} \Rightarrow n\cdot(-n) = -n^2$

2) Resolva as equações:

a) $n! = 24$

Solução:

$n! = 4!$ Transformamos 24 em 4!

$n = 4$

$S = \{4\}$

b) $n! = 5 \cdot (n-1)!$

Solução:

$n\cdot(n-1)! = 5\cdot(n-1)!$ Desenvolvemos n! até (n – 1)!

$n = 5$

$S = \{5\}$

c) $(n-1)! = 10\cdot(n-2)!$

Solução:

$(n-1)\cdot(n-2)! = 10\cdot(n-2)!$

$n-1 = 10$

$n = 11$

$S = \{11\}$

## Números Binomiais

Definimos como um número binomial o número: $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Leitura "binomial de n sobre p", em que n é o numerador e p o denominador, em que $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$.

### Conseqüência da Definição:

1) $\binom{n}{0} = 1$ exemplo: $\binom{4}{0} = 1$ 3) $\binom{n}{n} = 1$ exemplo: $\binom{6}{6} = 1$

2) $\binom{n}{1} = n$ exemplo: $\binom{5}{1} = 5$ 4) $\binom{n}{n-1} = n$ exemplo: $\binom{8}{7} = 8$

Outros exemplos:

$\binom{5}{3}$

Solução:

Aplicando a fórmula, obtemos:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = 10$$

$$\binom{9}{7} = \frac{9!}{7!(9-7)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

## Igualdade de Números Binomiais

Se $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$, então $p = q$ ou $p + q = n$.

Exemplo:

$$\binom{10}{2x} = \binom{10}{8}$$

Solução:

$2x = 8$ ou $2x + 8 = 10$

$x = 4$ $\quad$ $2x = 2 \Rightarrow x = 1$

Se $x = 4$, obtemos números binomiais iguais e, se $x = 1$, obtemos números binomiais complementares.

**Resumindo**

Dois binomiais são complementares se **p + q = n.**

## Relação de Stiffel

É válida a relação

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Exemplos:

a) $\binom{12}{6} + \binom{12}{7} = \binom{13}{7}$ Sendo $n = 12$ e $p = 6$

b) $\binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{10}{7}$

Solução:

$$\binom{10}{6} + \binom{10}{7} = \binom{11}{7}$$

## Resolvendo Equações com Números Binomiais

1) Determine x, tal que: $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} = 5$ .

Solução:

$x + 1 = 5$

$x = 5 - 1 \Rightarrow x = 4$

$S = \{4\}$

2) $\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{x}$

Solução:

Usando a Relação de Stiffel:

$$\binom{9}{4} = \binom{9}{x}$$

$x = 4$ ou $x + 4 = 9 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{4, 5\}$

3) $\binom{13}{3n+1} = \binom{13}{2n+3}$

Solução:

$3n + 1 = 2n + 3$ ou $3n + 1 + 2n + 3 = 13$

$3n - 2n = 3 - 1$ $5n = 13 - 1 - 3$

$n = 2$ $5n = 9 \Rightarrow n = \frac{9}{5}$ (não convém $n \notin \mathbb{N}$)

$S = \{2\}$

## Triângulo de Pascal

Podemos escrever os números binomiais abaixo na forma de um triângulo conhecido como Triângulo de Pascal.

linha $n = 0$ $\binom{0}{0}$

linha $n = 1$ $\binom{1}{0}\binom{1}{1}$

linha $n = 2$ $\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$

linha $n = 3$ $\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$

linha $n = 4$ $\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$

linha $n = 5$ $\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$

linha $n = 6$ $\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

linha $n = n$ $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\cdots\binom{n}{n}$

A linha é representada pelo numerador do número binomial iniciado pela linha 0 e a coluna, pelo denominador iniciado pela coluna 0.

Esses valores podem ser dispostos numa tabela, como está demonstrado abaixo:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | | |
| n = 1 | 1 | 1 | | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| n = 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| n = 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| n = 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| n = 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

**Obs.1:**

- Todos os elementos da 1ª coluna são iguais a 1, pois $\binom{n}{0} = 1$ para qualquer n natural.
- O último elemento de cada linha é igual a 1, pois $\binom{n}{n} = 1$ para qualquer n natural.
- Em qualquer linha, dois binomiais eqüidistantes dos extremos são iguais.
- A soma dos elementos da linha n do triângulo de Pascal é sempre $2^n$.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Exemplos:

a) $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3 = 8$

b) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 = 32$

**Obs.2:**

• A soma dos n primeiros termos da coluna p é igual ao termo n da coluna p + 1.

Exemplo:

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\ldots+\binom{9}{3}$$

Observamos que se trata da soma dos nove primeiros termos da 3ª coluna do triângulo de Pascal.

Portanto, essa soma é igual ao 10º termo da 4ª coluna $\binom{10}{4}$.

$$\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!\,(10-4)!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{4!\,\cancel{6!}}=210$$

• A soma dos n termos das diagonais de ordem p é igual ao termo n da coluna de ordem p + 1.

Exemplo:

$$\binom{0}{0}+\binom{1}{1}+\binom{2}{2}+\binom{3}{3}+\binom{4}{4}=\binom{5}{4}$$

## Binômio de Newton

Podemos obter uma fórmula para desenvolver todas as potências de $(x + a)^n$, em que $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(x + a)^0 &= 1\\
(x + a)^1 &= 1x + 1a\\
(x + a)^2 &= 1x^2 + 2xa + 1a^2\\
(x + a)^3 &= 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3\\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Os coeficientes dos termos do binômio representam o próprio triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{lcccc}
n = 0 & 1 & & & \\
n = 1 & 1 & 1 & & \\
n = 2 & 1 & 2 & 1 & \\
n = 3 & 1 & 3 & 3 & 1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

De modo geral, temos:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^0 a^n$$

**Obs.:**

- Quando desenvolvemos $(x + a)^n$, verificamos que os expoentes de **x** decrescem de n a 0 e os expoentes de **a** crescem de 0 a n.
- No desenvolvimento de $(x - a)^n$, os termos de ordem ímpar têm sinal positivo e os de ordem par têm sinal negativo.

Exemplos:
Com o auxílio do triângulo de Pascal, desenvolva:

a) $$(x+2a)^5 = \binom{5}{0}x^5(2a)^0 + \binom{5}{1}x^4(2a)^1 + \binom{5}{2}x^3(2a)^2 + \binom{5}{3}x^2(2a)^3 + \binom{5}{4}x^1(2a)^4 + \binom{5}{5}x^0(2a)^5$$
$$= 1x^5 \cdot 1 + 5x^4 2a + 10x^3 4a^2 + 10x^2 8a^3 + 5x16a^4 + 1 \cdot 32a^5$$
$$= x^5 + 10ax^4 + 40a^2x^3 + 80a^3x^2 + 80a^4x + 32a^5$$

b) $$(a-3b)^4 = \binom{4}{0}a^4(3b)^0 - \binom{4}{1}a^3(3b)^1 + \binom{4}{2}a^2(3b)^2 - \binom{4}{3}a^1(3b)^3 + \binom{4}{4}a^0(3b)^4$$
$$= 1a^4 \cdot 1 - 4a^3 3b + 6a^2 9b^2 - 4a27b^3 + 81b^4$$
$$= a^4 - 12a^3b + 54a^2b^2 - 108ab^3 + 81b^4$$

## Termo Geral

Podemos obter com a fórmula do termo geral qualquer termo no desenvolvimento de.

$$(x+a)^n = \underbrace{\binom{n}{0}x^n a^0}_{1^{\underline{o}}\ \text{termo}} + \underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}a^{n-1}}_{2^{\underline{o}}\ \text{termo}} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}a^{n-2}}_{3^{\underline{o}}\ \text{termo}} \ldots$$

Portanto:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^{p} \qquad \text{ou} \qquad T_{p+1} = (-1)^{p} \cdot \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^{p}$$

Exemplos:

1) Calcule o 4º termo no desenvolvimento $(2x + 1)^6$.

Solução:

Queremos encontrar o quarto termo, então:

$$p + 1 = 4$$
$$p = 3$$

Substituindo na fórmula:

$$T_{3+1} = \binom{6}{3} \cdot (2x)^{6-3} \cdot 1^{3}$$

$$T_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\ 3!} \cdot (2x)^{3} \cdot 1$$

$$T_4 = 20 \cdot 8x^{3}$$

$$T_4 = 160x^{3}$$

2) Determine o termo independente de x no desenvolvimento $\left(x^3 - \frac{1}{x^4}\right)^7$.

Solução:

Termo independente de x significa que o expoente de x é zero.

Logo:

$$T_{p+1} = (-1)^{p} \cdot \binom{7}{p} \cdot (x^{3})^{7-p} . (x^{-4})^{p}$$

$$T_{p+1} = (-1)^{p} \cdot \binom{7}{p} \cdot x^{21-3p} \cdot x^{-4p}$$

$$T_{p+1} = (-1)^p \cdot \binom{7}{p} \cdot x^{-7p+21}$$

$$T_{3+1} = (-1)^3 \cdot \binom{7}{3} \cdot x^0$$

$$T_4 = -1 \cdot \frac{7!}{3!\,4!} \cdot x^0$$

$$T_4 = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{6}\ \cancel{4!}} \cdot x^0$$

$$T_4 = -35$$

Temos então:

$$\begin{aligned} -7p + 21 &= 0 \\ -7p &= -21 \\ 7p &= 21 \\ p &= 3 \end{aligned}$$

3) Determine o termo médio de $(x - 1)^6$.

Solução:

Se desenvolvermos $(x - 1)^6$, obteremos 7 termos.

Portanto, o termo médio ou central será o quarto termo.

$$p + 1 = 4$$

$$p = 3$$

$$T_{p+1} = (-1)^p \cdot \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot a^p$$

$$T_{3+1} = (-1)^3 \cdot \binom{6}{3} \cdot x^{6-3} \cdot 1^3$$

$$T_{3+1} = -1 \cdot \frac{6!}{3!\,3!} \cdot x^3$$

$$T_4 = -20x^3$$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Calcule o valor dos fatoriais:

a) $6!$ b) $3!$ c) $0!$ d) $4! + 2!$ e) $5! - 4! - 3!$ f) $\frac{4! + 5!}{3!}$

2) Simplifique as expressões:

a) $\frac{4!}{2!}$ d) $\frac{n!}{(n-2)!}$ g) $\frac{(2x+2)!}{(2x)!}$

b) $\dfrac{12!}{10!}$

c) $\dfrac{8!}{4!\,6!}$

e) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$

f) $\dfrac{(n+1)!+n!}{n!}$

h) $\dfrac{n!\,(n-1)!}{(n-2)!\,(n+1)!}$

3) Resolva as equações:

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}=0$

b) $(n+1)! = 8 \,.\, n!$

c) $\dfrac{x!}{(x-2)!}+\dfrac{(x+1)!}{x!}=26$

d) $(x!)^2 = 36[(x-1)!]^2$

4) (UFPA) Simplificando $\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}$, obtemos:

a) $\dfrac{1}{n+2}$

b) $\dfrac{n!}{n+1}$

c) $\dfrac{1}{(n+2)\cdot(x+1)}$

d) $\dfrac{n!}{n+2!}$

e) $\dfrac{1}{n+1}$

5) Calcule os seguintes números binomiais:

a) $\dbinom{4}{2}$ b) $\dbinom{6}{0}$ c) $\dbinom{8}{8}$ d) $\dbinom{5}{0}+\dbinom{5}{1}+\dbinom{5}{2}$

6) Resolva as seguintes equações:

a) $\dbinom{12}{2x}=\dbinom{12}{x+6}$

b) $\dbinom{10}{n^2-9}=\dbinom{10}{10n+2}$

c) $\dbinom{12}{3x+1}+\dbinom{12}{2x+4}=\dbinom{13}{8}$

d) $\dbinom{x+2}{2}=3$

7) Calcule:

a) $\dbinom{6}{0}+\dbinom{6}{1}+\dbinom{6}{2}+\dbinom{6}{3}+\dbinom{6}{4}+\dbinom{6}{5}+\dbinom{6}{6}$

b) $\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}$

c) $\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

8) Sendo $\binom{7}{2x}=\binom{7}{x-2}$, calcule $\binom{6}{x}$.

9) (UNESP – SP) Seja n um número natural tal que

$\binom{10}{4}+\binom{10}{n+1}=\binom{11}{4}$. Então:

a) $n = 5$ b) $n = 4$ c) $n = 3$ d) $n = 2$

10) Desenvolva os seguintes binômios:

a) $(x + 1)^6$ b) $(2x – 3y)^5$ c) $(ax^2 – 2b)^3$ d) $(x – 1)^3$ e) $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^4$

11) Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$.

12) Determine o termo em $x^5$ no desenvolvimento de $(x + 2)^7$.

13) (PUC – SP) O termo no desenvolvimento de $(2x^2 – y^3)^8$ que contém $x^{10}$ é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

14) (UFES) Qual o termo central de $(x – 3)^6$?

a) $– 540x^3$ b) $– 3240x^3$ c) $3240x^3$ d) $540x^3$ e) $540x^4$

## Respostas

1) a) 720 b) 6 c) 1 d) 26 e) 90 f) 24

2) a) 12 d) $n^2 - n$ g) $4x^2 + 6x + 2$

b) 132 e) $n^2 + 5n + 6$ h) $\frac{n-1}{n+1}$

c) $\frac{7}{3}$ f) $n + 2$

3) a) $\varnothing$ b) $S = \{7\}$ c) $S = \{5\}$ d) $S = \{6\}$

4) e

5) a) 6 b) 1 c) 1 d) 16

6) a) $x = 6$ ou $x = 2$ b) 11 c) 2 d) 1

7) a) 64 b) $\binom{8}{3} = 56$ c) 31

8) 20 9) d

10) a) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$
b) $32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5$
c) $a^3x^6 - 6a^2bx^4 + 12ab^2x^2 - 8b^3$
d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
e) $x^8 - 8x^5 + 24x^2 - \frac{32}{x} + \frac{16}{x^4}$

11) Não existe. 12) $84x^5$

13) c 14) a