UNIDADE VII – ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Por que aprender Análise Combinatória e Probabilidade?

A teoria das probabilidades está diretamente ligada à vida moderna, pois estuda os métodos de contagem.

Onde usar os conhecimentos sobre Análise Combinatória e Probabilidade?

Os conhecimentos de probabilidade podem ser utilizados na previsão de vendas no comércio, em campanhas eleitorais, para medir o desempenho dos candidatos, na organização do trânsito etc.

Capítulo 1

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Introdução

Os métodos de contagem foram iniciados no século XVI pelo matemático italiano Niccolo Fontana, conhecido como Tartaglia.

A análise combinatória é a parte da Matemática que estuda os métodos de contagem.

O princípio multiplicativo é o alicerce para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos.

Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem permite-nos a contagem sem descrição das possibilidades.

Quando o número de possibilidades é pequeno, podemos usar o processo chamado **diagrama de árvore**.

Exemplo:

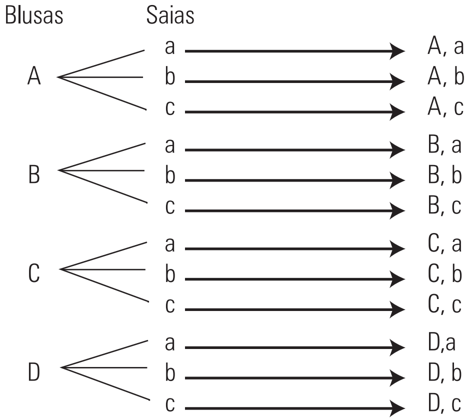
1) Juliana possui 4 blusas (A, B, C, D) e 3 saias (a, b, c). De quantas maneiras diferentes Juliana pode se vestir, usando apenas essas peças?

Aplicando o diagrama de árvore, temos:

Saiba mais

Que chances uma pessoa tem de acertar a quina da Loto?

Foi a necessidade de calcular as possibilidades existentes nos chamados "jogos de azar" que levou os matemáticos ao desenvolvimento da Análise Combinatória.



Obtemos 12 maneiras diferentes.

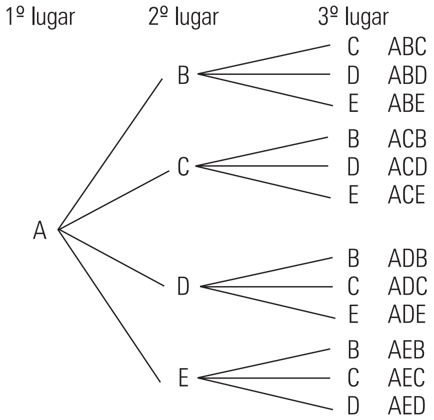
2) Numa competição entre 6 alunos, os prêmios foram distribuídos da seguinte forma:

1º colocado: um computador

2º colocado: uma bicicleta

3º colocado: um celular

De quantas maneiras os seis alunos podem se classificar, de modo que três recebam os prêmios?



Há 12 maneiras diferentes para o aluno A obter o primeiro lugar.
Portanto, como há 6 alunos, multiplicamos por 12:

6 x 12 = 72 maneiras diferentes.

3) A placa de um automóvel é formada por duas letras seguidas por um número de quatro algarismos. Com as letras L e M e os algarismos pares, quantas placas diferentes podem ser constituídas, de modo que o número não tenha algarismos repetidos?

Solução:

$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
2	2	5	4	3	2

Pelo princípio fundamental da contagem, obtemos:

$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 480$

Resumindo

O princípio fundamental da contagem pode ser apresentado da seguinte forma:

Se um evento é constituído de duas ou mais maneiras independentes, então o evento pode ocorrer de m.n.o.p... modos.

Arranjos Simples

Observe o seguinte problema:

Dado o conjunto A = {3, 5, 8}, escreva todos os números de dois algarismos distintos com os elementos de A.

3	5	35
	8	38
5	3	53
	8	58
8	3	83
	5	85

Os números de dois algarismos são 35, 38, 53, 58, 83 e 85.

Então, podemos escrever com os elementos de A, 6 números de dois algarismos distintos, em que cada grupo difere do outro pela natureza dos elementos ou pela ordem dos elementos, como 58 e 85, por exemplo.

A esses grupos damos o nome de **arranjos simples**.

De modo geral, definimos:

Arranjos simples de p elementos distintos, dado um conjunto de n elementos, é qualquer grupo formado por p dos n elementos ($p \leq n$), sendo que cada grupo difere do outro pela natureza dos elementos ou pela ordem dos elementos.

Indicação: $A_{n,\,p}$, em que n = nº total de elementos.
p = nº de elementos de cada grupo.

No exemplo dado, $n = 3$ e $p = 2$ e o número total de arranjos simples de 3 elementos 2 a 2 é $A_{3,\,2} = 6$.

Fórmula: $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Exemplos:

1) Calcule o valor de $A_{4,\,2}$.

Solução:

$n = 4$ e $p = 2$

Usando a fórmula, obtemos:

$$A_{4,\,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 12$$

2) Resolva a equação $A_{n,\,2} = 2$.

Solução:

$$A_{n,\,2} = 2$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 2$$

$$\frac{n\,(n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 2$$

$$n^2 - n = 2$$

$$n^2 - n - 2 = 0$$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$
$\Delta = 9$

$$n = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$n' = 2$ e $n'' = -1$ (não convém)
$S = \{2\}$

3) Num campeonato com 9 clubes, quantos jogos serão realizados em dois turnos?

Solução:

$n = 9$ e $p = 2$

$$A_{9,\,2} = \frac{9!}{(9-2)!}$$

$$A_{9,\,2} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 72$$

Serão realizados 72 jogos.

Arranjos com Repetição

Consideramos os números de dois algarismos que podemos formar com os números 2, 3, 4, 5.

Se formarmos grupos com algarismos distintos, temos um arranjo simples de quatro elementos 2 a 2:

23, 24, 25, 34, 35, 32, 43, 54, 42, 45, 52, 53.

Considerando que os dois algarismos sejam distintos ou não, temos um arranjo com repetição de quatro elementos 2 a 2:

22, 23, 24, 25, 33, 34, 35, 32, 43, 44, 42, 45, 52, 53, 54, 55.

Definimos esses casos como **arranjos com repetição** de n elementos diferentes, tomados de p a p $(AR)_{n,\,p} = n^p$.

Exemplo:

Dado o conjunto das vogais, quantos arranjos com repetição podemos formar tomando 2 vogais?

Solução:
Usando a fórmula, obtemos:

$n = 5$ (vogais)
$p = 2$

$(AR)_{n,\,p} = n^p$
$(AR)_{n,\,p} = 5^2$
$(AR)_{n,\,p} = 25$

Podemos formar 25 arranjos.

Permutação Simples

Dado o conjunto $B = \{a, b, c\}$, escreva todos os elementos de 3 algarismos distintos com os elementos de B.

abc, acb, bca, bac, cab e cba

Assim, com o conjunto $B = \{a, b, c\}$, de 3 elementos, podemos escrever 6 números de 3 elementos distintos, em que todos os elementos participam.

Definimos esses agrupamentos como **permutação simples**.

De modo geral:

Permutação simples de n elementos (P_n) são agrupamentos formados com n elementos apenas trocando de lugar entre si.

Fórmula: $P_n = n!$, em que n = nº total de elementos, pois

$$P_n = A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Com a expressão $P_n = n!$, podemos calcular, por exemplo, P_4.
$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Exemplos:
1) Calcule o valor das expressões:
a) P_5

Solução:
$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $2 \cdot P_4 + A_{5,\,2}$
$P_4 = 4! = 24$

$$A_{5,\,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

Então: $2 \cdot P_4 + A_{5,\,2}$
$2 \cdot 24 + 20 = 68$

2) Quantos anagramas podemos formar da palavra A M O R?

Solução:

Anagrama significa ordenação de letras.

São anagramas da palavra A M O R, por exemplo: AMOR, AORM, ARMO etc.

O número de anagramas é o número de permutações que se podem fazer com as letras da palavra AMOR.

$P_4 = 4! = 24$

Permutação com Elementos Repetidos

Vamos determinar o número de anagramas da palavra M A T E M Á T I C A.

Nesse exemplo, temos M, A, T, letras repetidas. Tratando-se de permutação com elementos repetidos, indicados por:

$$P_n^{\alpha,\, \beta\, \gamma ...} = \frac{n!}{\alpha!\, \beta!\, \gamma!}$$

α, β, γ ... representam o número de vezes que as letras da palavra se repetem.

Portanto:

$$P_{10}^{2,\,3,\,2} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!}$$

$$P_{10}^{2,\,3,\,2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3!}}$$

$$P_{10}^{2,\,3,\,2} = 151.200$$

Podemos formar com a palavra M A T E M Á T I C A 151.200 anagramas.

Quantos números diferentes obtemos reagrupando os algarismos do número 623233?

Solução:

Como os números 2 e 3 se repetem, aplicamos a fórmula:

$$P_6^{2,\,3} = \frac{6!}{2!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3!}} = 60$$

Combinação Simples

Definimos **combinação simples** de n elementos distintos agrupados p a p, $C_{n,\,p}$ ou $\binom{n}{p}$, os agrupamentos de naturezas diferentes.

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Na combinação, a ordem dos elementos no agrupamento não importa.

Exemplos:

1) Calcule o valor da expressão: $x = P_5 + 2 \cdot A_{3,2} + C_{6,3}$.

Solução:

$$P_5 = 5! = 120$$

$$A_{3,\,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

$$C_{6,\,3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$$

Portanto: $x = P_5 + 2 \cdot A_{3,2} + C_{6,3}$

$x = 120 + 12 + 20$

$x = 152$

Saiba mais

A análise combinatória é aplicada nas artes gráficas. Por meio da técnica de impressão de um impresso colorido, podemos obter a combinação de vários pigmentos de cor, em diferentes proporções.

2) Resolva a equação $C_{x,\,2} = 1$.

Solução:

$C_{x,\,2} = 1$

$$\frac{x!}{2!\,(x-2)!} = 1$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot \cancel{(x-2)!}}{2 \cdot \cancel{(x-2)!}} = 1$$

$x^2 - x = 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$

$\Delta = 1 + 8$

$\Delta = 9$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$x' = 2$

$x'' = -1$ (não convém) $S = \{2\}$

3) Com um grupo de 9 pessoas, quantas comissões de 3 pessoas podemos formar?

Solução:

$$\frac{x!}{2!\,(x-2)!} = 1$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot \cancel{(x-2)!}}{2 \cdot \cancel{(x-2)!}} = 1$$

Podemos formar 84 comissões.

4) Numa sala de aula, temos 6 rapazes e 3 moças. Quantos grupos podemos formar de 4 rapazes e 2 moças?

Solução:

rapazes: $C_{6,\,4} = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{6!}{4!\,2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\,2!} = 15$

moças: $C_{3,\,2} = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = \dfrac{3!}{2!\,1!} = \dfrac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\;1!} = 3$

Nesse exemplo, devemos multiplicar os grupos formados:

$C_{6,\,4} \cdot C_{3,\,2} = 15 \cdot 3 = 45$

5) Sobre uma circunferência, tomam-se 5 pontos distintos. Calcule o número de polígonos convexos que se pode obter com vértices nos pontos dados.

Solução:

Podemos formar vários polígonos, como triângulos, quadriláteros e pentágonos.

número de triângulos: $C_{5,\,3} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\;2!} = 10$

número de quadriláteros: $C_{5,\,4} = \dfrac{5!}{4!\,1!} = \dfrac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$

número de pentágonos: $C_{5,\,5} = \dfrac{5!}{5!\,0!} = 1$

Logo, o número total de polígonos é $10 + 5 + 1 = 16$.

Capítulo 2

PROBABILIDADE

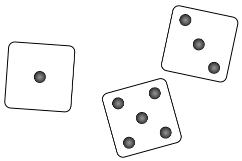
Introdução

A teoria das probabilidades estuda os experimentos aleatórios.

Usamos a probabilidade em situações em que dois ou mais resultados diferentes podem ocorrer, não podendo ser previstos.

Assim, quando lançamos um dado sobre uma mesa, o número voltado para cima pode ser 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Se perguntarmos qual a probabilidade de ocorrer um número ímpar, o resultado será:



Temos três resultados favoráveis (1, 3 e 5) em um total de 6 resultados.

As chances de dar um resultado ímpar são de 3 em 6. Podemos dizer que a probabilidade será $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$.

Experimento Aleatório

Define-se **experimento aleatório** todo experimento que, repetido várias vezes, pode apresentar resultados diferentes.

Exemplos de experimentos aleatórios:

1) lançamento de uma moeda;

2) lançamento de um dado;

3) retirada de uma carta de um baralho;

4) a extração de uma bola de uma urna.

Espaço Amostral

Para um experimento aleatório é possível obter vários resultados possíveis.

Define-se como **espaço amostral** o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Indicamos espaço amostral por U.

Exemplos:

1) Lançamento de duas moedas e a observação das faces voltadas para cima.

Indicaremos cara (C) e coroa (K).

$U = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$ $\quad$ $U = 4$ possibilidades

2) Lançamento de um dado comum.

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}   U = 6 possibilidades

Se lançarmos 2 dados e observarmos os números das faces voltadas para cima, podemos construir a seguinte tabela.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

U = 36 possibilidades

Saiba mais

EM BUSCA DA IGUALDADE

A probabilidade é uma teoria destinada a fixar a possibilidade dos acontecimentos.

A ética é uma teoria destinada a indicar as normas em que os atos devem se ajustar, quando os acontecimentos ocorrem.

A humanidade conta com alguns recursos que podem prever determinados acontecimentos e nessa prevenção tornar situações adequadas ao meio de vida.

O mesmo acontece na relação étnica entre brancos e negros, em que é possível estimar uma probabilidade de ambos usufruírem dos mesmos direitos e cumprirem deveres.

Evento

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.
Indicamos pela letra E.

Exemplos:
1) No lançamento de um dado, observe um número ímpar.
$E = \{1, 3, 5\}$ $n(E) = 3$

2) No lançamento de duas moedas, observe o aparecimento de pelo menos uma cara.
$E = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$ $n(E) = 3$

Obs.:
O evento será impossível se $E = \varnothing$.
Por exemplo: no lançamento de um dado, aparecer um número maior que 6.

Probabilidade de um Evento

Sendo o número de elementos do espaço amostral n(U) e o número do evento A, n(A), definimos a **probabilidade de um evento** A como:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Exemplos:

1) No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de sair números iguais nos dois dados.

Solução:

Evento A: sair números iguais nos dois dados

$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
$n(A) = 6$ e $n(U) = 36$

Então: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots \text{ ou } 16{,}66\%$$

2) Na escolha de um número de 1 a 40, qual a probabilidade de que seja sorteado um múltiplo de 6?

Solução:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 40\}$ $A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$

$n(U) = 40$ $n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{6}{40} = 0{,}15 = 15\%$$

3) Uma urna contém 12 bolas pretas, 8 azuis e 5 vermelhas, todas iguais. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade de:

a) ser uma bola azul; b) ser uma bola vermelha.

Solução:

a) Temos 8 bolas azuis $n(A) = 8$, e o número total de bolas é $n(U) = 25$. Então:

$$P(A) = \frac{8}{25} = 0{,}32 = 32\%$$

b) Temos 5 vermelhas $n(B) = 5$, e o número total de bolas é $n(U) = 25$. Então:

$$P(A) = \frac{5}{25} = 0{,}20 = 20\%$$

4) Ao retirar 1 carta de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de sair uma carta de ouros?

Solução:

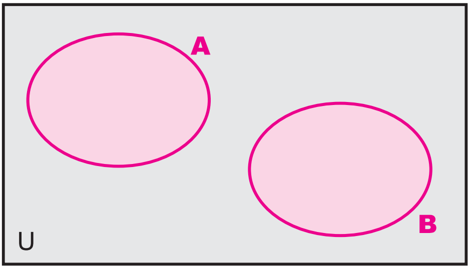
O espaço amostral de um baralho de 52 cartas é $n(U) = 52$.

O evento sair uma carta de ouros é 13 cartas de ouros, $n(A) = 13$.

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

Eventos Mutuamente Exclusivos

Dois eventos A e B são definidos como **mutuamente exclusivos** se $A \cap B = \varnothing$.



Exemplo:

Seja o lançamento de um dado e os eventos

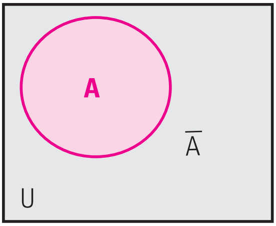
A: ocorrência de número menor que 4, então $A = \{1, 2, 3\}$

B: ocorrência de número maior que 4, então $B = \{5, 6\}$

$A \cap B = \varnothing$

Eventos Complementares

Define-se como **evento complementar** de A ($A \subset U$) o evento $\overline{A} = U - A$.



Exemplo:

Seja o lançamento de duas moedas e o evento

A: ocorrência de pelo menos uma coroa.

A = {(C, K), (K, C), (K, K)}, então:

$\overline{A}$: ocorrência que não saia nenhuma coroa U – A = {(C, C)}

Então, podemos definir a fórmula para eventos complementares:

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Outros exemplos:

1) Sendo A o evento ocorrer um número 3 no lançamento de um dado, qual a probabilidade de não sair o número 3?

Solução:

$P(A) = \frac{1}{6}$ (sair o número 3 no lançamento de um dado)

Usando a fórmula:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$\frac{1}{6} + P(\overline{A}) = 1$$

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{6-1}{6} \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{5}{6}$$

A probabilidade de não sair o número 3 no lançamento de um dado é $\frac{5}{6}$.

2) Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 pretas. Sorteando-se três delas, qual é a probabilidade de que pelo menos uma seja preta?

Solução:

$$n(U) = \binom{8}{3} \qquad \begin{cases} n = 8 \ (\text{n}^{\text{o}} \text{ total de bolas}) \\ p = 3 \ (\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas sorteadas}) \end{cases}$$

$$n(U) = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

$$n(A) = \binom{5}{3} \qquad \begin{matrix} n = 5 \ (\text{nº total de bolas brancas}) \\ p = 3 \ (\text{3 bolas sorteadas}) \end{matrix}$$

$$n(A) = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2!}} = 5 \cdot 2 = 10$$

$n(A) = \frac{10}{56}$ (probabilidade de sair uma bola branca)

Usando a fórmula:

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$\frac{10}{56} + P(\overline{A}) = 1$

$P(\overline{A}) = 1 - \frac{10}{56}$

$P(\overline{A}) = \frac{46}{56} = \frac{23}{28}$ (probabilidade de pelo menos uma bola ser preta)

União de Probabilidades

Dados dois eventos do espaço amostral U, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se $A \cap B = \varnothing$ são eventos mutuamente exclusivos, $P(A \cap B) = \varnothing$, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplos:

1) Qual a probabilidade de se obter, no lançamento de um dado, um número ímpar ou primo.

Solução:

Seja A o evento sair um número ímpar $A = \{1, 3, 5\}$

$n(A) = 3$

$P(A) = \frac{3}{6}$

Seja B o evento sair um número primo $B = \{2, 3, 5\}$

$n(B) = 3$

$P(B) = \frac{3}{6}$

Seja o evento sair um número ímpar e um número primo $A \cap B = \{3, 5\}$.

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

Então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2) Qual a probabilidade de, no lançamento de dois dados, se obter soma 6 ou sair números iguais nos dois dados?

Solução:

Sendo A o evento soma 6, $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

$n(A) = 5 \qquad P(A) = \frac{5}{36}$

Sendo B o evento números iguais $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$n(B) = 6 \qquad P(B) = \frac{6}{36}$

Sendo $A \cap B$ o evento obter soma 6 e números iguais nos dois dados $n(A \cap B) = \{(3, 3)\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36}$$

$$P(A \cup B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Probabilidade do produto

Seja A e B dois eventos independentes pertencentes a U, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Em geral, podemos obter para n eventos:

$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_n$

Exemplos:

1) Determine a probabilidade de sair o número 4 em 3 lançamentos sucessivos de um dado.

Solução:

Sendo os eventos A: sair o número 4 no primeiro lançamento; B: o evento sair o número 4 no segundo lançamento; e C: o evento sair o número 4 no terceiro lançamento.

Então:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $n(U) = 6$

$$n(A) = 1 \quad P(A) = \frac{1}{6}$$

$$n(B) = 1 \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

$$n(C) = 1 \quad P(C) = \frac{1}{6}$$

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

2) Num baralho de 52 cartas, retirando-se, sem reposição, duas cartas, qual a probabilidade de sair a primeira carta de ouros e a segunda carta de espadas?

Saiba mais

A probabilidade, além dos outros ramos da Matemática (Cálculo e Estatística), é utilizada na Biologia, nos estudos da genética; na Física Nuclear; na Sociologia; na Economia etc.

Solução:

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \text{ sair uma carta de ouros}$$

$$P(B) = \frac{13}{51} \text{ sair uma carta de espada}$$

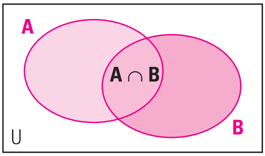
Obs.:

O espaço amostral na segunda retirada será 51, pois retiramos a carta sem reposição.

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{13}{51} \cdot \frac{13}{51} = \frac{13}{204}$$

Probabilidade Condicional

Definimos como **probabilidade condicional** de A, dado um evento B, a probabilidade de ocorrer o evento A, supondo que B ocorreu.



A probabilidade condicionada de A, dado B, será:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{ou} \quad P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Exemplo:

No lançamento de dois dados, verificou-se que resultou soma 7. Qual é a probabilidade de um dos dados apresentar o número 2?

Solução:

Sendo B o evento do dado que resultou soma 7:

$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ $\quad n(B) = 6$.

O evento $A \cap B$ resulta em soma 7 e um dos dados deve apresentar o nº 2:

$A \cap B = \{(2, 5), (5, 2)\}$ $\quad n(A \cap B) = 2$

$$P(A/B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Distribuição Binomial

Quando repetimos um experimento várias vezes, independentes um do outro, observa-se a probabilidade de ocorrer um evento (sucesso) assim como seu complementar (fracasso). A probabilidade de ocorrerem k sucessos e n – k fracassos é dada pela fórmula.

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Exemplos:

1) Uma moeda é lançada 6 vezes. Calcule a probabilidade de sair "coroa" 3 vezes.

Solução:

Se coroa é sucesso, a probabilidade de sair coroa é $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$ (sair cara).

A probabilidade de obtermos 3 sucessos em 6 lançamentos é:

$$P = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3}$$

$$P = \binom{6}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$$

$$P = \frac{6!}{3!\ 3!} \cdot \frac{1}{64}$$

$$P = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{3!}} \cdot \frac{1}{64} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

2) Uma prova consta de 8 questões com 5 opções de resposta cada uma, sendo que 1 única alternativa é a correta. Qual a probabilidade de acertar 3 das 8 questões?

Solução:

n(U) = 5 opções e n(A) = 1 única alternativa correta.

Sucesso: $p = \frac{1}{5}$ (acertar)

Fracasso: $q = 1 - p$ (errar)

$$q = 1 - \frac{1}{5} = q = \frac{4}{5}$$

$$P = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$P = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}\ \cancel{5!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{5!}} \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{1024}{3125}$$

$$P = \frac{56 \cdot 1 \cdot 1024}{125 \cdot 3125}$$

$$P = \frac{57 \cdot 344}{390.625} \cong 0,14$$

3) Um casal quer ter 4 filhos. Qual a probabilidade de que sejam 2 casais?
Solução:

$n(U) = 4$

$$P = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2!}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Saiba mais

Devemos respeitar as diferenças e as imperfeições.

Assim como o homem que constrói o mundo não é uma obra rude e acabada, mas delicadamente surpreendente, suas leis não são mais tidas como perfeitas e exatas; são encaradas como regras flexíveis e variáveis, convenientes para nossos sentidos imperfeitos.

Texto extraído do livro *Matemática ("O elo Matemática – Incertezas")*, de Kátia Cristina S. Smole e Rokusaburo Kiyukawa.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Análise Combinatória

1) Uma casa tem 3 portões e, após o jardim, 4 portas. De quantos modos distintos alguém pode entrar na casa?

2) Cinco times de futebol (Palmeiras, São Paulo, Santos, Flamengo e Vasco) disputam um torneio. Quantas são as possibilidades de classificação para os três primeiros lugares?

3) Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados usando-se os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6?

4) (FGV – RJ) Existem 3 linhas de ônibus ligando a cidade A à cidade B e 4 outras ligando B à C. Uma pessoa deseja viajar da cidade A à C, passando por B. Quantas linhas diferentes poderá utilizar na viagem de ida e volta, sem usar duas vezes a mesma linha?

5) Ao jogar uma moeda, pode ocorrer cara ou coroa na face superior. Considere o evento jogar três moedas idênticas e determine quantas são as possibilidades.

6) Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os algarismos do sistema decimal?

7) Calcule:

a) $A_{6,\,2}$

b) $\dfrac{A_{5,\,2}}{A_{3,\,1}}$

c) $\dfrac{5 \cdot P_3 + 2 \cdot P_4}{A_{4,\,2}}$

d) $3\,P_7 - 2A_{4,\,2} - 6C_{4,\,2}$

8) Resolva as equações:

a) $A_{x,\,3} = A_{x,\,2}$

b) $C_{x,\,2} = 6$

c) $C_{x,\,3} - C_{x,\,2} = 0$

d) $C_{x\,+\,2,\,4} = 11C_{x,\,2}$

e) $P_5 = x!$

9) De quantas maneiras o pai, a mãe e os três filhos podem sentar-se ao redor de uma mesa circular?

Sugestão: $(PC)_n = (n - 1)!$

PC – Permutação Circular

10) Em um vestibular, cada uma das quarenta questões apresenta cinco alternativas diferentes. De quantos modos é possível responder a essas questões?

11) Quantos são os anagramas da palavra F L O R?

12) Quantos números de 5 algarismos distintos podem ser escritos com os elementos do conjunto $\{3, 4, 5, 7, 8\}$?

13) Quantos são os anagramas da palavra L I V R O que começam por vogal?

14) Entre 10 participantes de uma competição, de quantas maneiras diferentes pode ser formado o grupo dos 4 primeiros colocados?

15) Calcule o número de diagonais de um eneágono.

16) De quantos modos diferentes podem sentar-se oito pessoas:

a) se ficarem todas em fila?

b) se ficarem todas em fila, mas os lugares extremos forem ocupados pelo mais velho e mais novo?

17) Quantos são os anagramas da palavra T E S O U R A?

18) Quanto aos anagramas da palavra R E V I S T A, calcule:

a) o número total;

b) o número dos que terminam em S;

c) o número dos que começam por IS.

19) Determine a quantidade de números distintos que podemos obter permutando os algarismos dos números:

a) 6 5 4 3 5 b) 6 7 6 7 7 6

20) (UEG) Calcule de quantas maneiras podem ser dispostas 4 damas e 4 cavalheiros numa fila, de forma que não fiquem juntos dois cavalheiros e duas damas.

21) De quantos modos podemos ordenar 3 livros de Matemática, 2 de Física e 4 de Português, de modo que os livros da mesma matéria fiquem sempre juntos?

22) (F.C.CHAGAS – BA) Considerem-se todos os anagramas da palavra M O R E N A. Quantos deles têm as vogais juntas?

a) 36 c) 120 e) 180

b) 72 d) 144

Probabilidade

23) Determine os seguintes espaços amostrais:

a) Lançamento de uma moeda.

b) Retirada simultânea de duas cartas de um baralho com 52 cartas.

c) Lançamento simultâneo de um dado e uma moeda.

d) Numa classe com 12 alunos, deseja-se formar uma comissão de 4 membros.

e) Em uma rifa concorrem 200 pessoas com os números de 0 a 199.

24) Determine os eventos:

a) No lançamento de um dado, sair um número primo.

b) No lançamento de duas moedas, sair duas coroas.

c) No lançamento de dois dados, soma 5.

25) Lançando simultaneamente dois dados, calcule a probabilidade de que a soma seja 7.

26) De um baralho de 52 cartas, uma carta é extraída ao acaso. Determine os eventos:

a) ocorrer uma carta de paus;

b) sair uma figura.

27) Escolhe-se, ao acaso, um dos anagramas da palavra R É G U A. Qual a probabilidade de a palavra escolhida começar com G?

28) Uma urna contém 50 bolas numeradas de 1 a 50. Uma bola é extraída ao acaso da urna e o número é observado. Qual a probabilidade de o número observado ser múltiplo de 12?

29) No lançamento simultâneo de dois dados diferentes, calcule a probabilidade de ocorrer:

a) a soma dos números igual a 5; b) os dois números primos.

30) Ao retirarmos uma bola de uma urna que contém 20 bolas numeradas de 1 a 20, qual a probabilidade de a bola ser um número múltiplo de 3 ou ser primo?

31) Ao jogarmos um dado, qual a probabilidade de sair o número 2 quatro vezes?

32) Numa pesquisa sobre a preferência entre dois refrigerantes, coca-cola e guaraná, obtivermos o seguinte resultado:

20 tomam guaraná; 15 tomam coca-cola;
8 tomam os dois; 3 não tomam nenhum dos dois.

Sorteando-se uma pessoa ao acaso, calcule a probabilidade de ela tomar guaraná ou coca-cola.

33) (MAUÁ) Lançando-se simultaneamente um dado e uma moeda, determine a probabilidade de se obter 3 ou 5 no dado e cara na moeda.

34) (VUNESP) Tomando-se, ao acaso, uma das retas determinadas pelos vértices de um pentágono regular, a probabilidade de que a reta tomada ligue dois vértices consecutivos é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{5}$

35) Um dado é lançado 5 vezes. Qual a probabilidade de o número 1 aparecer 3 vezes?

36) Dado um baralho de 52 cartas, determine a probabilidade de retirar quatro ases em seis retiradas sucessivas, sem reposição.

37) A probabilidade de se escolher peça defeituosa é de $\frac{1}{4}$. Calcule a probabilidade de que, ao se escolher 4 peças, 2 delas sejam defeituosas.

38) A probabilidade de um atirador acertar um alvo é $\frac{1}{3}$. Qual a probabilidade que ele tem, em 5 tiros, de acertar 3?

Respostas

1) 12 modos 2) 15 3) 60

4) 12 5) 8 6) 81

7) a) 30 b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{13}{2}$ d) 15060

8) a) {3} b) {4} c) {5} d) {10} e) 120

9) 24 10) 5^{40} 11) 24 12) 120

13) 48 14) 5040 15) 27

16) a) 40.320 b) 1.440 17) 5040

18) a) 5040 b) 720 c) 120

19) a) 60 b) 20 20) 1152

21) 1728 22) d

23) a) U = {(C, K)}
b) U = 1326
c) U = {(1, C), (1, K), (2, C), (2, K), (3, C), (3, K), (4, C), (4, K), (5, C), (5, K), (6, C), (6, K)}
d) U = 495
e) U = {0, 1, 2, ..., 199}

24) a) E = {2, 3, 5} b) E = {(K, K)} c) E = {(1, 4), (2, 3), (3, 2) ,(4, 1)}

25) $\frac{1}{6} = 16{,}66\%$ 26) a) E = 13 b) E = 16

27) $\frac{1}{5} = 20\%$ 28) $\frac{4}{50} = 8\%$ 29) a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{6}$

30) $\frac{13}{20}$ 31) $\frac{1}{1296}$ 32) $\frac{5}{6}$ 33) $\frac{1}{6}$

34) a 35) 3, 2% 36) $\frac{2160}{4.826.809}$

37) $\frac{27}{128} = 21\%$ 38) $\frac{40}{243} \cong 16\%$