UNIDADE IX – NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Por que aprender sobre Números Complexos?

Ao estudar os Números Complexos percebemos que sua ligação à geometria nos dá uma perspectiva mais rica dos métodos geométricos típicos e das transformações geométricas.

Com esse conhecimento, desenvolvemos nosso raciocínio e o aplicamos em situações cotidianas.

Onde usar os conhecimentos sobre Números Complexos?

A aplicação dos Números Complexos é ampla na engenharia, na mecânica de fluídos, na hidrodinâmica, na eletrostática, na teoria quântica etc., além de ser uma poderosa ferramenta para matemáticos, físicos e engenheiros.

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Introdução

No início, os números eram reais (os inteiros, as frações e mesmo os decimais não exatos nem periódicos). No século XVI, os matemáticos começaram a utilizar $\sqrt{-1}$ para representar as raízes da equação $x^2 + 1 = 0$. Criou-se, então, a unidade imaginária $i^2 = -1$.

A invenção dessa unidade imaginária possibilitou encontrar números, que, elevados ao quadrado, resultavam em números negativos.

Quando solucionamos, por exemplo, a equação $x^2 + 1 = 0$, encontramos $x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$.

A raiz quadrada de um número negativo não é um número real. Por isso surgiu um novo conjunto chamado números complexos ($\mathbb{C}$).

Saiba mais

O COMPLEXO É SIMPLES

O nome é complicado, a definição também, mas quando vemos um exemplo qualquer entendemos o que é um número complexo.

Teoricamente, é aquele que exprime uma grandeza medida em unidades que não guardam entre si relações decimais.

Pense então na hora, nos minutos e nos segundos. Eles relacionam-se na base 60?

Fonte: *Superinteressante,* outubro,1997.

Com isso, as equações que tinham como solução uma raiz quadrada de um número negativo ou equações em que $\Delta < 0$, passaram a ter solução.

Criou-se, então, uma unidade imaginária definida por $i^2 = -1$, em que $i = \sqrt{-1}$.

Logo, a solução da equação $x^2 + 1 = 0$ será $x^2 = -1$:

$x = \pm\sqrt{-1}$ Substituindo $\sqrt{-1}$ por i, escrevemos:

$x = \pm i$ $S = \{-i, i\}$

Outros exemplos:

$x^2 + 64 = 0$

$x^2 = -64$

$x = \pm\sqrt{-64}$

$x = \pm 8i$

$S = \{-8i, 8i\}$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$

$\Delta = -4$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$x = \frac{\cancel{2}(1 \pm i)}{\cancel{2}}$$

$x' = 1 + i$

$x'' = 1 - i$

$S = \{1 - i, 1 + i\}$

Forma Algébrica

Definimos como **número complexo** todo número que pode ser escrito na forma $z = a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$.

a é a parte real.

bi é a parte imaginária.

$z = a + bi$ é a forma algébrica do complexo.

Exemplos:

a) $z = 5 - 2i$	Se $a \neq 0$ e $bi \neq 0$, o número é chamado número imaginário.
b) $z = -10i$	Se $a = 0$ e $z = bi$, o número é chamado imaginário puro.
c) $z = 3$	Se $bi = 0$, $z = a$ é real.

Saiba mais

O IMAGINÁRIO ELETRIZANTE ENCONTRA-SE NA FÍSICA

O número i ($\sqrt{-1}$) está presente na fórmula que calcula a corrente elétrica ($P = iU$), em que P é a potência e U é a tensão elétrica.

Podemos notar que ele é um imaginário eletrizante, pois pode provocar até raios.

Outros exemplos:

a) $z = -1 + 2i$ $\begin{cases} -1 \text{ é a parte real} & a = -1 \\ 2 \text{ é a parte imaginária} & b = 2 \end{cases}$

b) $z = -12i$ $\begin{cases} a = 0 \\ b = -12 \end{cases}$

c) $z = -18$ $\begin{cases} a = -18 \\ b = 0 \end{cases}$

Associe ao complexo na forma $z = a + bi$ o par ordenado (a,b) correspondente:

a) $z = 3 - 2i$ $\quad z = (3, -2)$

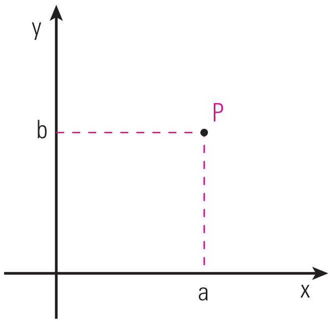
b) $z = -5$ $\quad z = (-5, 0)$

c) $z = -4i$ $\quad z = (0, -4)$

d) $z = -1 - i$ $\quad z = (-1, -1)$

Plano de Argand-Gauss

O número complexo $z = a + bi$ pode ser representado na forma geométrica e é denominado plano de Argand-Gauss.



No plano de Argand-Gauss, x é o eixo real e y, o eixo imaginário.

Assim, o número complexo $z = a + bi$ é representado nesse plano pelo ponto de coordenada (a, b) e esse ponto é denominado afixo ou imagem do número complexo.

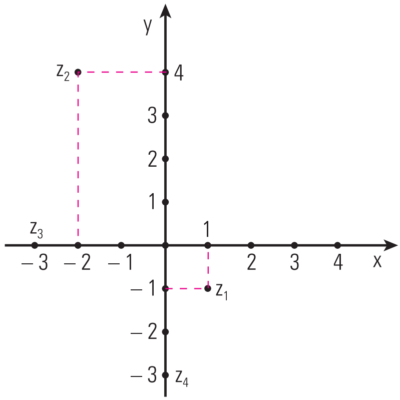
Representе, no plano de Argand-Gauss, os seguintes complexos:

a) $z_1 = 1 - i$

b) $z_2 = -2 + 4i$

c) $z_3 = -3$

d) $z_4 = -3i$



Igualdade de números complexos

Dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ são iguais se, e somente se, têm a mesma parte real e a mesma parte imaginária.

$a + bi = c + di$

$a = c$ e $b = d$

Exemplos:

1) Determine a e b de modo que $a + bi = -3 + 2i$.

Solução:

$a + bi = -3 + 2i$

$a = -3$ e $b = 2$

2) Determine o valor de m e n de modo que:

$(m + n) + (2m - n)\,i = 6 - 3i$.

Solução: $\begin{cases} m + n = 6 \\ 2m - n = -3 \end{cases}$

$3m = 3$

$m = 1$

Substituindo $m = 1$ em:

$m + n = 6$

$1 + n = 6$

$n = 5$

Operações com Números Complexos

Soma e Subtração

Considere os números complexos $z_1 = 4 - i$ e $z_2 = -5 + 2i$.

Então:

$z_1 + z_2 = (4 - i) + (-5 + 2i)$

$z_1 + z_2 = 4 - i - 5 + 2i$

$z_1 + z_2 = -1 + i$

Soma-se, respectivamente, suas partes reais e imaginárias.

$z_1 - z_2 = (4 - i) - (-5 + 2i)$

$z_1 - z_2 = 4 - i + 5 - 2i$

$z_1 - z_2 = 9 - 3i$

Saiba mais

CONTANDO NA CHUVA

Imagine o número 1 seguido de cem zeros. Como você chamaria esse número gigantesco?

A resposta é gugol. Só para ter idéia, se fosse contar todas as gotas de uma tempestade, elas não seriam suficientes para chegar a um gugol.

Embora seja enorme, trata-se de um número finito. É muito usado nas medições astronômicas.

Fonte: *Superinteressante*, outubro,1997.

Multiplicação

$z_1 \cdot z_2 = (4 - i) \cdot (-5 + 2i)$

$z_1 \cdot z_2 = -20 + 8i + 5i - 2i^2$

$z_1 \cdot z_2 = -20 + 8i + 5i - 2(-1)$ Substituindo i^2 por -1:

$z_1 \cdot z_2 = -20 + 8i + 5i + 2$

$z_1 \cdot z_2 = -18 + 13i$

Conjugado de um Número Complexo

O número $\overline{z} = a - bi$ é denominado conjugado do número complexo $z = a + bi$.

Exemplos:

$z = 2 - 3i$ $\qquad \overline{z} = 2 + 3i$

$z = -8i$ $\qquad \overline{z} = 8i$

$z = -4$ $\qquad \overline{z} = -4$

Obtemos o conjugado de um número complexo trocando o sinal do coeficiente da parte imaginária.

Divisão

Dados dois números complexos z_1 e z_2 (com $z_2 \neq 0$, para obtermos $\frac{z_1}{z_2}$), multiplicamos ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador.

Exemplos:

Calcule os quocientes:

a) $\frac{1-i}{2+i}$

$$\frac{1-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i-2i+i^2}{4-i^2} = \frac{1-3i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

b) $\frac{4-2i}{-3i}$

$$\frac{4-2i}{-3i} \cdot \frac{3i}{3i} = \frac{12i-6i^2}{-9i^2} = \frac{6}{9} + \frac{12}{9}i = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}i$$

Potências de i

Calculando:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

Podemos observar que, a cada quatro potências, o resultado volta a se repetir. Assim, basta dividir o expoente de i por 4 e o resultado será i elevado ao resto da divisão.

Exemplos:

a) $i^{431} = i^3 = -i$

$$\begin{array}{r|l} 431 & 4 \\ \hline 31 & 107 \\ 3 & \end{array}$$

b) $\dfrac{1}{i^{35}} = \dfrac{1}{i^3} = \dfrac{1}{-i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{-i^2} = i$

$$\begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ \hline 3 & 8 \end{array}$$

c) $i^{58} - i^{140} + i^3$

$i^2 - i^0 - i =$

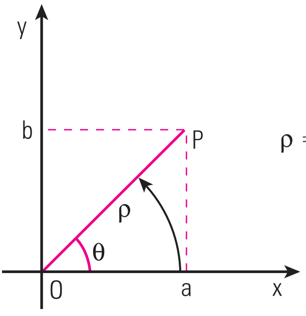
$-1 - 1 - i = -2 - i$

Assim, podemos construir a seguinte tabela:

resto	i^{resto}	potência
0	i^0	1
1	i^1	i
2	i^2	-1
3	i^3	$-i$

Módulo e Argumento

Representando graficamente $z = a + bi$, definimos como **módulo** a distância ρ de P até a origem 0.



$$\rho = |z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

O argumento do complexo z é a medida do ângulo θ, formado por $\overline{OP}$, com o eixo real 0x, medido no sentido anti-horário.

Assim:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{b}{\rho} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

Exemplos:

Determine o módulo, o argumento e represente graficamente os seguintes complexos:

a) $z = 2 - 2i$

Solução:

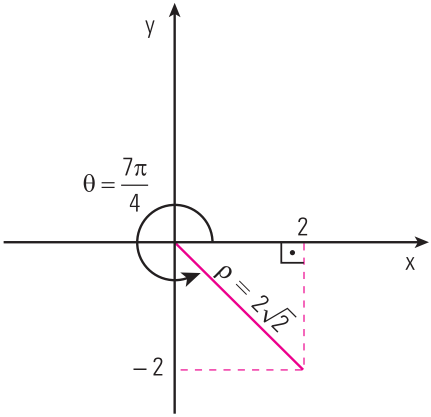
$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad a = 2$

$\rho = \sqrt{2^2+(-2)^2}$ $\qquad b = -2$

$\rho = \sqrt{8}$

$\rho = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \cos \theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta = 315^{\circ} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4}$$



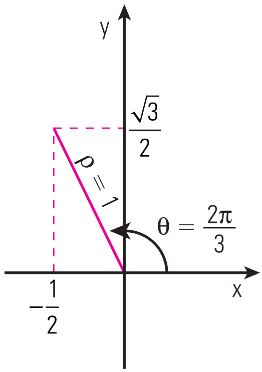
b) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\rho = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\rho = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}}$$

$$\rho = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\[2ex] \cos \theta = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \theta = 120^{\circ} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3}$$



Forma Trigonométrica

Todo complexo $z = a + bi$ pode ser representado na forma trigonométrica, definida por $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Assim, nos exemplos anteriores:

• $z = 2 - 2i$, em que $\rho = 2\sqrt{2}$ e $\theta = 315^o$ ou $\frac{7\pi}{4}$,

podemos representar na forma trigonométrica:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$$

• $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, em que $\rho = 1$ e $\theta = 120^o$ ou $\frac{2\pi}{3}$,

podemos representar na forma trigonométrica:

$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

Outros exemplos:

1) Represente na forma trigonométrica o complexo:
$z = -2i$
Solução:

$$\rho = \sqrt{0^2 + (-2)^2} \qquad a = 0$$

$$\rho = \sqrt{4} \qquad b = -2$$

$$\rho = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{2} = -1 \\ \cos\theta = \frac{0}{2} = 0 \end{array}\right\} \theta = 270^o \text{ ou } \frac{3\pi}{2}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

2) (FEI–SP) Dado $z = \dfrac{4-3i}{3+4i}$, determine:

a) seu argumento e seu módulo.

$$z = \frac{4-3i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{12-16i-9i+12i^2}{9-(4i)^2} = \frac{-25i}{25} = -i$$

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\rho = \sqrt{0^2+(-1)^2}$$

$$\rho = \sqrt{1}$$

$$\rho = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= -\frac{1}{1} = -1 \\ \cos\theta &= \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}\right\} \theta = 270^\circ \text{ ou } \frac{3\pi}{2}$$

b) A forma trigonométrica de z.

Colocando $z = -i$ na forma trigonométrica, temos:

$$z = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

Forma Algébrica

Dado $z = a + bi$, na forma trigonométrica, podemos colocá-lo na forma algébrica.

Exemplo:

Determine a forma algébrica dada a forma trigonométrica.

$$z = 6 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{e } \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solução:

$$z = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot i\right) \Rightarrow -\frac{6\sqrt{2}}{2} - \frac{6\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i$$

Operações na Forma Trigonométrica

Multiplicação, Divisão e Potenciação

Dados dois números complexos $z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ na forma trigonométrica, obtemos na multiplicação:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)]$$

Na divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)]$$

Na potenciação:

$$z_1^n = \rho_1^n [\cos n \,.\, \theta_1 + i \operatorname{sen} n\, \theta_1]$$

(Fórmula de Newton-Moivre)

Exemplos:

1) Dados $z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$ e

$z_3 = \left(\cos\frac{\pi}{16} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{16}\right)$, calcule:

a) $z_1 \cdot z_2$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 8\left[\cos\frac{4\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{8}\right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

b) $\frac{z_2}{z_3}$

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{4}{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16}\right)\right]$$

$$\frac{z_2}{z_3} = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi - \pi}{16}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi - \pi}{16}\right)\right]$$

$$\frac{z_2}{z_3} = 4\left[\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{16}\right]$$

c) z_1^4

$$z_1^4 = 2^4\left(\cos\ 4\cdot\frac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\ 4\cdot\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$z_1^4 = 16\left(\cos\ \frac{12\pi}{8} + i\,\text{sen}\ \frac{12\pi}{8}\right)$$

$$z_1^4 = 16\left(\cos\ \frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\ \frac{3\pi}{2}\right)$$

2) (MACK–SP) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{102}$, $i = \sqrt{-1}$, é igual a:

a) i b) – i c) 1 d) 1 + i e) –1

Solução:

Resolvemos inicialmente a divisão:

$$\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\begin{array}{r|l} 102 & 4 \\ \hline 22 & 25 \\ 2 & \end{array}$$

$$(i)^{102} = i^2 = -1$$

Resposta: e

3) Determine o valor de $\left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^4$.

Solução:

Seja $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, então:

$$\rho = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\rho = \sqrt{2+2}$$

$$\rho = \sqrt{4}$$

$$\rho = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z^4 = 2^4\left(\cos\ 4\cdot\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\ 4\cdot\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z^4 = 16(\cos\ 5\pi + i\operatorname{sen}\ 5\pi)$$

$$z^4 = 16(\cos\ \pi + i\operatorname{sen}\ \pi)$$

$$z^4 = 16(-1+0i)$$

$$z^4 = -16$$

Radiciação

Todo número complexo $z \neq 0$ tem exatamente n raízes enésimas.
Assim, podemos aplicar a fórmula:

$$\boldsymbol{\omega_K = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2K\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right)}$$

Em que $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq K \leq n - 1$ (segunda fórmula de Moivre).
Exemplos:
1) Calcule as raízes cúbicas de $z = 27$.
Solução:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\rho = \sqrt{27^2 + 0^2}$$

$$\rho = 27$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{0}{27} = 0 \\ \cos\theta = \dfrac{27}{27} = 1 \end{array}\right\} \theta = 0^o$$

Portanto, $z = 27(\cos 0^o + i \operatorname{sen} 0^o)$

$$\omega_K = \sqrt[n]{z}$$

$$\omega_K = \sqrt[3]{27}$$

$$\omega_K = 3$$

$$\omega_K = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{0+2K\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{0+2K\pi}{n}\right)$$

$$\omega_K = \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{0+2K\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{0+2K\pi}{3}\right)$$

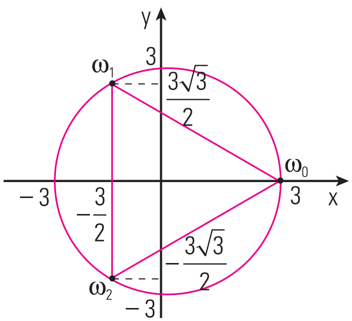
$$\omega_K = 3\left(\cos\frac{2K\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{3}\right)$$

Se $K = 0$

$$\omega_0 = 3(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 3(1 + 0i) = 3$$

$$K = 1 \Rightarrow \omega_1 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$K = 2 \Rightarrow \omega_1 = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} \cdot -\frac{\sqrt{3}i}{2}\right) = -\frac{3}{2} \cdot -\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$



Os afixos que representam essas raízes são vértices de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência de raio 3.

Resposta: 3, $-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

2) Resolva a equação $x^4 + 1 = 0$

Solução:

$x^4 + 1 = 0$

$x^4 = -1$

Devemos calcular as raízes quartas de –1.

$z=-1$

$\rho=\sqrt{(-1)^2+0^2}$

$\rho=1$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta=\frac{0}{1}=0 \\ \cos\theta=-\frac{1}{1}=-1 \end{array}\right\}\theta=\pi$$

Então:

$z=1(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)$

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi+2K\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+2K\pi}{4}\right)\right]$$

$$\text{Se } K=0\Rightarrow\omega_0=1\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)=1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{Se } K=1\Rightarrow\omega_1=1\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)=1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{Se } K=2\Rightarrow\omega_2=1\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)=1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{Se } K=3\Rightarrow\omega_3=1\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)=1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$$

Capítulo 2

POLINÔMIOS/EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Desde a Antiguidade até o início do século XIX, os matemáticos tentaram encontrar fórmulas que resolvessem equações de grau maior que 4, mas não conseguiram.

Resolver uma equação algébrica significa encontrar as raízes do polinômio P, os valores de x, tal forma que $P(x) = 0$.

D'Alembert enunciou a propriedade:

Toda equação de grau maior que zero tem, pelo menos, uma raiz complexa.

Embora não existam fórmulas que nos permitam resolver equações de grau maior que 4, existem métodos de aproximação que nos permitem descobrir essas raízes.

Chamamos de **função polinomial** ou simplesmente **polinômio** qualquer função de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ definida por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0$$

Em que:
$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0$ são números complexos;
$n, n-1, n-2, ...$ são números naturais (expoentes);
$a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, a_{n-2}x^{n-2}, ..., a_0$ são termos.

Exemplo:

$P(x) = -2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 1$

- Os termos são: $-2x^4, 3x^3, -x^2, x, -1$.
- Os coeficientes são $a_4 = -2$, $a_3 = 3$, $a_2 = -1$, $a_1 = 1$ e $a_0 = -1$.
- A variável é x.
- O termo independente da variável é: -1

Grau do Polinômio

Denomina-se **grau do polinômio** o maior expoente da variável.
Indica-se o grau de P(x) por gr(P).

Exemplos:

a) $P(x) = -2x^6 - x^4 + 3x^3 + x + 5 \Rightarrow gr(P) = 6$
$P(x) = 2x^2 - x^4 - 3x + 4 \Rightarrow gr(P) = 4$
$P(x) = 8x - 4 \Rightarrow gr(P) = 1$
$P(x) = 10 \Rightarrow gr(P) = 0$
$P(x) = 0 \Rightarrow$ não é definido

b) Determine o grau dos seguintes polinômios, em função de m e n.
$P(x) = mx^5 + 4x^4 - x^2 - 6$
Se $m = 0 \Rightarrow gr(P) = 4$
Se $m \neq 0 \Rightarrow gr(P) = 5$

$P(x) = mx^4 - 2nx^3 + 4x$
Se $m \neq 0 \Rightarrow gr(P) = 4$
Se $m = 0$ e $n \neq 0 \Rightarrow gr(P) = 3$
Se $m = 0$ e $n = 0 \Rightarrow gr(P) = 1$

Valor Numérico de um Polinômio

O valor numérico de P(x), para x = a, é o número complexo que se obtém substituindo o x por a.

Exemplos:
1) Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, determine:
a) $P(-1)$
$P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 1 = -2$

b) $P\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + 1 = \frac{22}{27}$

c) $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$
$P(1) = 0 \Rightarrow P(a) = 0$, então a é uma raiz ou um zero da função.

Assim, 1 é uma raiz de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

2) Sabendo-se que -3 é raiz de $P(x) = ax^2 + 2x + 5$, calcule o valor de a.

Solução:

Se -3 é raiz de $P(x) = ax^2 + 2x + 5$, então $P(-3) = 0$.

Substituindo $x = -3$ em $P(x) = ax^2 + 2x + 5$, temos:

$$a \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 5 = 0$$
$$9a - 6 + 5 = 0$$
$$9a - 1 = 0$$
$$9a = 1$$
$$a = \frac{1}{9}$$

Polinômio Identicamente Nulo

Um polinômio é identicamente nulo se todos os seus coeficientes forem iguais a zero.

Indicação $P(x) = 0$

Exemplo:

Determine m, n, p, q para que o polinômio

$P(x) = (m + p)\,x^3 + nx^2 + (p - 3)x + q$ seja identicamente nulo.

Igualando todos os seus coeficientes a zero, temos:

$m + p = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -3$

$n = 0$

$p - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 3$

$q = 0$

Polinômio Idêntico

Dados dois polinômios A(x) e B(x), dizemos que $A(x) \equiv B(x)$ se os coeficientes dos termos correspondentes forem iguais.

Exemplos:

1) Determine a, b, c e d de modo que

$A(x) = (a + b)x^3 + (b + 1)x^2 + (c - 2)x + d$ e $B(x) = 4x^3 - x^2 + 2$ sejam polinômios idênticos.

Solução:

$$(a + b)x^3 + (b + 1)x^2 + (c - 2)x + d \equiv 4x^3 - x^2 + 2$$

Igualando os termos correspondentes, temos:

$a + b = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 6$

$b + 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -2$

$c - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 2$

$d = 2$

2) Obtenha os valores de m e n para que
$P(x) = x(x-1) + (m-4)x^2 - nx + 1$ e $Q(x) = (x-1)^2$ sejam idênticos.

Solução:

$P(x) \equiv Q(x)$

$x(x-1) + (m-4)x^2 - nx + 1 \equiv (x-1)^2$

$x^2 - x + mx^2 - 4x^2 - nx + 1 \equiv x^2 - 2x + 1$

$(1 + m - 4)x^2 + (-1 - n)x + 1 \equiv x^2 - 2x + 1$

$$\begin{cases} 1 + m - 4 = 1 & \Rightarrow \quad m = 4 \\ -1 - n = -2 & \Rightarrow \quad n = 1 \end{cases}$$

POLINÔMIOS E FÍSICA INTERAGEM

Podemos relacionar os polinômios (expressões matemáticas) com as grandezas físicas.

No estudo do movimento uniformemente variado (MUV), aplicamos uma fórmula importante:

$S = f(t) \qquad\qquad S = S_0 + V_0 t + \dfrac{at^2}{2}$

em que S_0 = espaço inicial
V_0 = velocidade inicial
a = aceleração
t = tempo

Assim, podemos calcular as grandezas dadas.

Operações com Polinômios

Adição e Subtração

Adicionamos ou subtraímos polinômios que apresentam os termos com mesmo grau.

Exemplo:

Sendo $P(x) = 4x^4 - x^3 + 2x - 1$ e $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$, calcule:

a) $P(x) + Q(x)$

$(4x^4 - x^3 + 2x - 1) + (x^3 + 3x^2 - x + 4)$

$4x^4 - \cancel{x^3} + 2x - 1 + \cancel{x^3} + 3x^2 - x + 4$

$4x^4 + 3x^2 + x + 3$

b) $Q(x) - P(x)$

$(x^3 + 3x^2 - x + 4) - (4x^4 - x^3 + 2x - 1)$

$x^3 + 3x^2 - x + 4 - 4x^4 + x^3 - 2x + 1$

$-4x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

Multiplicação

Exemplo:

$A(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ e $B(x) = x^2 + 3$

$A(x) \cdot B(x) = (x^3 + 2x^2 + 2x - 1) \cdot (x^2 + 3)$

$A(x) \cdot B(x) = x^5 + 3x^3 + 2x^4 + 6x^2 + 2x^3 + 6x - x^2 - 3$

$A(x) \cdot B(x) = x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 6x - 3$

Divisão

Dados os polinômios A(x) e B(x), não identicamente nulos, fazer a divisão de A(x) (dividendo) por B(x) (divisor) é obter Q(x) (quociente) e R(x) (resto), tal que:

$$\boxed{A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

Em que o grau do resto é menor que o grau do divisor ou o resto $R(x) = 0$. Nesse caso, dizemos que A(x) é divisível por B(x) e $gr(Q) = gr(A) - gr(B)$.

Método da Chave

Exemplo:

Divida $(2x^4 + 3x^2 - x + 6) : (x^2 - x)$

Solução:

$$\begin{array}{l|l} \overbrace{\cancel{2x^4}+0x^3+3x^2-x+6}^{\text{dividendo}} & \overbrace{x^2-x}^{\text{divisor}} \\ \hline \underline{-\cancel{2x^4}+2x^3} & \underbrace{2x^2+2x+5}_{\text{quociente}} \\ \quad \cancel{2x^3}+3x^2 & \\ \quad \underline{-\cancel{2x^3}+2x^2} & \\ \qquad \cancel{5x^2}-x & \\ \qquad \underline{-\cancel{5x^2}+5x} & \\ \qquad\quad 4x+6 \Rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

Se o grau do resto é menor que o grau do divisor, a divisão está terminada.

$$\underbrace{2x^4+3x^2-x+6}_{A(x)} \equiv \underbrace{(x^2-x)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(2x^2+2x+5)}_{Q(x)} + \underbrace{(4x+6)}_{R(x)}$$

Método do Coeficiente a Determinar (Método de Descartes)

Obtemos o quociente e o resto com o auxílio da identidade de polinômios.

Exemplo:

Determine m e n de modo que o polinômio $A(x) = x^4 + x^3 + mx^2 + n$ dividido por $B(x) = x^2 - x + 1$ dê resto igual a $2x - 1$.

Solução:

$A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

$x^4 + x^3 + mx^2 + n \equiv (x^2 - x + 1) \cdot (ax^2 + bx + c) + 2x - 1$

Para obtermos Q(x), devemos fazer:

$gr(Q) = gr(A) - gr(B) = gr(Q) = 4 - 2 = 2$

Como Q(x) é de 2º grau, $Q(x) = ax^2 + bx + c$

$x^4 + x^3 + mx^2 + n \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx + ax^2 + bx + c + 2x - 1$

$x^4 + x^3 + mx^2 + n \equiv ax^4 + (b - a)x^3 + (c - b + a)x^2 + (- c + b + 2)x + c - 1$

$a = 1$

$b - a = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 2$

$c - b + a = m \quad \Rightarrow \quad m = 3$

$-c + b + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 4$
$c - 1 = n \quad \Rightarrow \quad n = 3$

Divisão de Polinômios por x – a

Teorema do Resto

Na divisão de P(x) por x – a, o resto da divisão é R(x) = P(a).

Exemplos:

a) Calcule o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 4$ por $x - 2$.

Solução:

Aplicando o teorema do resto, temos:

$x - 2 = 0$ (igualamos o divisor a 0) e obtemos a raiz do divisor

$x = 2$

Então:

$P(2) = R(x)$

$2 \cdot 2^3 + 2^2 + 3 \cdot 2 + 4 = R(x)$

$R(x) = 30$

b) Determine o valor de K, para que o resto da divisão de
$A(x) = -x^4 + 2x^2 - Kx$ por $x + 1$ seja -3.

Solução:

$x + 1 = 0$

$x = -1$

$P(-1) = -3$

$-(-1)^4 + 2(-1)^2 - K(-1) = -3$

$-1 + 2 + K = -3$

$K = -3 + 1 - 2$

$K = -4$

Teorema de D'Alembert

Se P(a) = 0, dizemos que P(x) é divisível por x – a.

Exemplo:

Determine a, sabendo que $P(x) = ax^2 - 3x + 1$ é divisível por $x + 3$.

Solução:

$x + 3 = 0$

$x = -3$

$P(-3) = R(x)$

$P(-3) = 0$

$a \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 1 = 0$

$9a + 9 + 1 = 0$

$9a = -10$

$a = -\dfrac{10}{9}$

Se P(x) é divisível por $x + 3$, o resto é igual a 0.

Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Aplicamos o dispositivo prático de Briot-Ruffini nas divisões em que o divisor é da forma $x - a$.

Exemplos:

1) Divida $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 1$ por $B(x) = x + 1$.

Solução:

Temos:

gr $(A) = 3$ e gr$(B) = 1$ gr$(Q) = 3 - 1 = 2$

$x + 1 = 0$, então, a raiz do divisor $x = -1$

$$
\begin{array}{c|ccc:c}
-1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\
\hline
 & & (-1)\cdot 4 + 3 & (-1)\cdot(-1) - 1 & (-1)\cdot 0 + 1 \\
 & \underbrace{4 \quad\quad -1 \quad\quad 0}_{\text{coeficientes do quociente } Q(x)} & & & \underbrace{+1}_{\text{resto } R(x)}
\end{array}
$$

- Colocamos a raiz do divisor do lado esquerdo do dispositivo e, do lado direito, os coeficientes de todos os termos do dividendo.
- Separamos o último termo.
- Repetimos o primeiro coeficiente do dividendo.
- Multiplicamos a raiz do divisor pelo 1º coeficiente do dividendo, multiplicamos novamente a raiz pelo coeficiente e somamos com o próximo coeficiente. Assim procedemos até o último termo do polinômio.

Logo:

$Q(x) = 4x^2 - x$

$R(x) = +1$

2) Calcule o quociente e o resto das divisões:

a) $x^4 + x - 6$ por $x - 1$

Solução:

Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

$x - 1 = 0$

$x = 1$ (raiz do divisor)

1	1	0	0	1	– 6
	1	1	1	2	– 4

$Q(x) = x^3 + x^2 + x + 2$

$R(x) = -4$

b) $2x^2 - x + 3$ por $2x - 1$

$2x - 1 = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$	2	– 1	3
	2	0	3

$Q(x) = 2x(: 2)$ $Q(x) = x$

$R(x) = 3$

Obs.:

Como o coeficiente de x do divisor é diferente de 1, devemos dividir o quociente por 2, pois o coeficiente de x é 2.

Equações Polinomiais ou Equações Algébricas

Denomina-se **equação polinomial** ou **equação algébrica** toda equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, em que $a_n \neq 0$ e $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são números complexos e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

a) $4x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$ é uma equação do 4º grau.

b) $3x^5 + x^4 - x^3 - 2 = 0$ é uma equação do 5º grau.

Raiz ou zero de uma equação

Definimos **raiz** ou **zero** de $P(x) = 0$ o número que substituímos $P(a) = 0$.

Exemplos:

1) Verifique se 1 é raiz da equação:

$x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$

Solução:

Substituindo a variável x por 1, temos:

$1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 0$

$0 = 0$ (V)

2) Determine o valor de K na equação $x^4 - 4x^2 + x + K = 0$ para que -1 seja uma das raízes da equação:

Solução:

$(-1)^4 - 4 \cdot (-1)^2 - 1 + K = 0$

$1 - 4 - 1 + K = 0$

$K = 4$

Teorema Fundamental da Álgebra

Toda equação $P(x) = 0$ de grau $n \geq 1$ admite pelo menos uma raiz complexa.

Teorema da Decomposição

Todo polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, de grau $n \geq 1$, pode ser decomposto em n fatores do 1º grau.

$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ são raízes de $P(x) = 0$.

Exemplo:

Fatore as equações:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Resolvendo a equação:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$

$\Delta = 1$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

Logo, a forma fatorada será:
$P(x) = 1 \cdot (x - 3) \cdot (x - 2)$ ou $(x - 3) \cdot (x - 2) = 0$

b) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

Fatorando a equação por agrupamento, temos:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$
$$x^2(x - 1) + 1(x - 1) = 0$$
$$(x^2 + 1) \cdot (x - 1) = 0$$

$x^2 + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$x^2 = -1 \qquad x = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x = \pm i$

Logo, a forma fatorada será:

$P(x) = 1 \cdot (x = -1) \cdot (x - i) \cdot (x + i)$

Número de Raízes

Toda equação polinomial $P(x) = 0$ de grau $n \neq 1$ admite exatamente n raízes complexas.

Exemplos:

1) Resolva a equação $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$, sabendo que 3 é uma das raízes da equação.

Solução:

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc:c} 3 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ \hline & \underbrace{2 \quad\quad 1 \quad\quad -1}_{Q(x)} & & & 0 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 + x - 1$

As demais raízes da equação são denominadas igualando $Q(x) = 0$:

$2x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot (2) \cdot (-1)$

$\Delta = 9$

$x = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$

$x' = \dfrac{1}{2}$ e $x'' = -1 \Rightarrow S = \left\{-1, \dfrac{1}{2}, 3\right\}$

2) Determine o conjunto solução das equações:

a) $(x-1)\cdot(x+2)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot(x+3)=0$

As raízes dessa equação são 1, – 2, $\frac{1}{3}$, –3.

Logo, $S=\{1, -2, \frac{1}{3}, -3\}$.

b) $x(x-2)^3 \cdot (x+1)^2 = 0$

As raízes dessa equação são 0, 2, – 1.

Logo, $S = \{2, -1, 0\}$

2 é raiz tripla ou de multiplicidade 3 e – 1 é raiz dupla ou de multiplicidade 2.

O grau da equação será 6, obtido pela soma dos expoentes 1 + 3 + 2 = 6.

3) Escreva uma equação do 3º grau cujas raízes são –1, 2 e – 3 e $a_n = 2$.

Devemos representar a equação na forma fatorada:

$$a_n \cdot (x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot(x-\alpha_3) = 0$$
$$2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3) = 0$$
$$2\cdot(x^2-2x+x-2)\cdot(x+3) = 0$$
$$2\cdot(x^2-x-2)\cdot(x+3) = 0$$
$$2\cdot(x^3+3x^2-x^2-3x-2x-6) = 0$$
$$2\cdot(x^3+2x^2-5x-6) = 0$$
$$2x^3+4x^2-10x-12 = 0$$

Substituindo $a_n = 2$ e $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = -3$

Multiplicidade de uma Raiz

Uma equação polinomial $P(x) = 0$, com raiz α de multiplicidade n, pode ser definida por:

$$P(x) = (x-\alpha)^n \cdot Q(x)$$

Se $n = 1 \Rightarrow \alpha$ é raiz simples; $n = 2 \Rightarrow \alpha$ é raiz dupla ou de multiplicidade de 2; $n = 3 \Rightarrow \alpha$ é raiz tripla ou de multiplicidade 3; e assim sucessivamente.

Exemplos:

1) Determine na equação $(x+1)^2 \cdot (x-4)^3 \cdot (x-2) = 0$:

a) o grau da equação

O grau da equação é dado pela soma dos expoentes $2 + 3 + 1 = 6$

b) o conjunto verdade

$x = -1$ (raiz dupla)

$x = 4$ (raiz tripla)

$x = 2$ (raiz simples)

$S = \{-1, 2, 4\}$

2) Determine o conjunto solução da equação $x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0$, sabendo que 1 é raiz dupla da equação.

Solução:

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc:c} 1 & 1 & -7 & 11 & -5 \\ \hline 1 & 1 & -6 & 5 & 0 \\ & \underbrace{1 \quad -5 \quad 0}_{Q(x)} & & & \end{array}$$

$Q(x) = x - 5$

$x - 5 = 0$

$x = 5$

$S = \{1, 5\}$

3) Mostre que 2 é raiz tripla da equação:

$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0.$

Solução:

$$\begin{array}{c|cccc:c} 2 & 1 & -7 & 18 & -20 & 8 \\ \hline 2 & 1 & -5 & 8 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 0 & \\ & 1 & -1 & 0 & & \end{array}$$

Raízes Complexas

Se $P(x) = 0$ for uma equação polinomial de coeficientes reais e se o complexo $z = a + bi$ for raiz, então $\overline{z} = a - bi$ (conjugado de z) também será raiz de $P(x)$.

Exemplos:

1) Uma equação $P(x) = 0$ de grau 5 e coeficientes reais possuem raízes 2, i e $2 - 3i$.
Determine as demais raízes.

Solução:
Se i é raiz de $P(x)$, então $-i$ também é raiz.
Se $2 - 3i$ é raiz de $P(x)$, então $2 + 3i$ também é raiz.
Logo, as raízes são:
$\{2, i, -i, 2 - 3i, 2 + 3i\}$

2) (MACK - SP) A equação $2x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 37x - 15 = 0$ tem uma raiz igual a $2 + i$. As outras raízes da equação são:

a) $2 - i, -3, \frac{1}{2}$

b) $-2 + i, 3, -\frac{1}{2}$

c) $3 - i, -3, -\frac{1}{2}$

d) $3 + i, -1, -\frac{3}{2}$

e) $2 - i, 1, \frac{3}{2}$

Solução:

$2 + i$	2	-3	-13	37	-15
$2 - i$	2	$1 + 2i$	$5i - 13$	$6 - 3i$	0
	2	5	-3	0	

$Q(x) = 2x^2 + 5x - 3$
$2x^2 + 5x - 3 = 0$
$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)$
$\Delta = 25 + 24$

$\Delta = 49$

$x = \frac{-5 \pm 7}{4}$

$x' = \frac{1}{2}$

$x'' = -3$

Resposta: a

Raízes Racionais

Se a equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ de coeficientes inteiros admitir raízes racionais (expressos na forma $\frac{p}{q}$, em que p e q são primos entre si), então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Exemplo:

Determine as possíveis raízes racionais da equação

$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0.$

Solução:

Seja a equação $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$, em que $a_0 = 6$ e $a_n = 2$.

p é divisor de a_o $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

q é divisor de a_n $\{\pm 1, \pm 2\}$

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}\right\}$$

$\frac{1}{2}$	2	–3	–11	6
	2	–2	–12	0

$Q(x) = 2x^2 - 2x - 12$

$2x^2 - 2x - 12 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$

$\Delta = 25$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = -2 \end{cases}$$

$$S = \left\{-2, \frac{1}{2}, 3\right\}$$

Relações de Girard

Podemos estabelecer as relações entre coeficientes e raízes por meio das relações de Girard.

Se a equação for de 2º grau, com raízes x_1 e x_2, podemos estabelecer as relações:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Se a equação for de 3º grau, com raízes x_1, x_2 e x_3, teremos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Exemplos:

1) Calcule a soma e o produto das raízes da seguinte equação:

$4x^3 - 8x^2 + x - 2 = 0.$

Solução:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{(-8)}{4} = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = \frac{1}{4}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2) Se r_1, r_2 e r_3 são raízes da equação $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$, calcule o valor de:

a) $r_1 + r_2 + r_3$

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{(-4)}{2} = 2$$

b) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$

$$\frac{r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

c) $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$

$$(r_1 + r_2 + r_3)^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2(r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3)$$

$$2^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}$$

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$$

3) Calcule as raízes da equação $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são opostas.

Solução:

Se duas raízes são opostas $x_1 = -x_2$

$$\begin{cases} -x_2 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 \cdot (-x_2) + x_2 \cdot x_3 + (-x_2) \cdot x_3 = -4 \\ -x_2 \cdot x_2 \cdot x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\cancel{-x_2} \cancel{+x_2} + x_3 = 1$$

$$x_3 = 1$$

$$\begin{array}{c|ccc:c} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ \hline & \underbrace{1 \quad\quad 0 \quad\quad -4}_{Q(x)} & & & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2 \qquad\qquad S = \{-2, 1, 2\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Números Complexos

1) Resolva as equações no campo dos complexos:

a) $x^2 + 49 = 0$

b) $2x^2 + 4 = 0$

c) $x^2 + 2x + 2 = 0$

d) $x^2 - 8x + 25 = 0$

2) Determine a de modo que o número complexo $z = (a - 4) - 6i$ seja imaginário puro.

3) Determine m e n, para que o número complexo
$z = (m + 4) - (n^2 - 25)i$ seja:
a) um número imaginário puro.
b) um número real.

4) Sendo $z = (5a - 1) + (b + 2)\,i$, determine os números reais a e b tal que $z = 0$.

5) Determine a e b de modo que $2a - 4bi = 6 - 12i$.

6) (FATEC–SP) Seja $i^2 = -1$ e $\overline{z}$ o conjugado do número complexo z, tal que $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$.
Então:

a) $z = 1 + i$	c) $z = -1 - i$	e) $z = 0$
b) $z = -1 + i$	d) $z = 1 - i$	

7) Calcule m e n para que verifique:
$(3 + 2i) \cdot (m - i) = n + 5i$

8) Dê o conjugado dos seguintes números complexos:

a) $z = -4 + 5i$	c) $z = i - 1$
b) $z = -10$	d) $z = 6i$

9) Efetue:
a) $(-8 + 2i) + (5 - 3i) - (4 + 2i)$
b) $(1 - i) - (2 - 3i) - (5 + i)$
c) $(4 - 2i) \cdot (4 + 2i)$
d) $(8 - 2i) \cdot (4 + 5i)$

10) Calcule:

a) $\dfrac{i^{12} - i^{23}}{i^{32}}$ b) $i^{451} - i^{1420}$

11) (PUC–SP) O valor do módulo do número complexo $z = \begin{vmatrix} 1 & i \\ i^5 & i \end{vmatrix}$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) 2 e) 3

12) (UFAL) Se z é um número complexo tal que $z \cdot \overline{z} = 25$, então o módulo de z é:

a) $\sqrt{5}$ b) 5 c) $5\sqrt{5}$ d) 25

13) Calcule os seguintes quocientes:

a) $\dfrac{-4 - i}{8 - i}$ b) $\dfrac{3 - 2i}{-i}$

14) Determine o número z tal que $3z - \overline{z} = 5 - 2i$.

15) Determine o argumento dos seguintes números complexos:

a) $z = 1 + \sqrt{3}\ i$ b) $z = -8 + 8\sqrt{3}\ i$

16) Passe para forma trigonométrica os números complexos:

a) $z = -\sqrt{3} + i$ b) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

17) Passe para forma algébrica $z = 4\ (\cos 225^o + i\ \text{sen}\ 225^o)$.

18) Calcule:

a) $\sqrt[4]{1}$ b) as raízes cúbicas de $z = i$

19) (FGV – SP) Sendo i a unidade imaginária, o valor de $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^4$ é:

a) 1 b) i c) –1 d) –i e) 2i

Polinômios e Equações Polinomiais

20) Determine o grau dos polinômios em função de a e b:

a) $P(x) = ax^3 - bx^2 + 2x$

b) $P(x) = (3a - 6)x^6 + (b + 1)x^5 - x^2 + 3$

21) Sendo $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4$, calcule P(i).

22) Determine a, b, c e d na identidade:
a) $(a - 4)x^5 + (2b - 4)x^3 + (c + 6)x^2 + 2d - 8 \equiv 0$
b) $a(x^2 - x + 1) + (bx + c) \cdot (x + 1) \equiv 1$

23) Determine o quociente e o resto das divisões:
a) $3x^5 + x^4 - x^2 - 3$ por $x + 1$
b) $x^4 + x^2 + 1$ por $x^2 - 1$

24) Determine os valores de a, b e c para que

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 1}.$$

25) Para que valor de a $A(x) = x^2 + ax + 6$ é divisível por $x - 3$?

26) Calcule o quociente e o resto, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini:
a) $x^4 - 2x^2 - 1$ por $2x + 1$
b) $(x^5 - 4x^3 - 2) : (x + 3)$

27) Encontre os valores de p e q, sabendo que
$P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + x - 6$ é divisível por $Q(x) = x^2 + x + 3$.

28) (UFAL) Se o resto da divisão do polinômio
$p = 3x^3 + Kx^2 + 7x - 1$ por $x - 3$ é igual a 2, então o valor de K é:
a) – 108 b) – 11 c) 11 d) 90 e) 103

29) Decomponha num produto de fatores do 1º grau a equação
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, sabendo que 1, 2 e 3 são raízes dessa equação.

30) Determine o conjunto da equação:
$(x + 1) \cdot (x - i) \cdot (x + i) \cdot (x + 3) = 0$

31) Uma equação do 4º grau possui como raízes os números – 2, 4, 2 + i, 2 – i. Escreva a forma fatorada dessa equação.

32) Se 1 é raiz dupla da equação $3x^3 - 7x^2 + 5x + m = 0$, calcule o valor de m e a outra raiz da equação.

33) Dê a multiplicidade da raiz – 2 do polinômio
$P(x) = x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 28x + 12$.

34) (ITA) Se a, b e c são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$, calcule o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

35) Determine o grau, a multiplicidade e o conjunto solução das seguintes equações:
a) $(x - 2)^3 \cdot (x + 4)^2 \cdot (x - 1) = 0$
b) $x^2 \cdot (x + 1)^4 \cdot (x - 3)^3 = 0$

36) Resolva a equação $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$, sabendo que uma raiz é o inverso da outra.

37) Resolva a equação $x^5 - 2x^4 - x + 2 = 0$, aplicando a propriedade de raízes racionais.

38) (UNESP) A equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, de coeficientes reais, admite raízes $2 - i$ e $3 + 2i$. Então d é:
a) 75 b) 65 c) 25 d) 15 e) 10

39) (MED – ABC) As raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ estão em progressão aritmética. Suas raízes são:
a) 1, 2, 3
b) 2, 3, 4
c) 1, 3, 5
d) 2, 4, 6
e) 3, 6, 8

Respostas

1) a) $\{\pm 7i\}$
b) $\{\pm \sqrt{2}\, i\}$
c) $\{-1 - i, -1 + i\}$
d) $\{4 + 3i, 4 - 3i\}$

2) $a = 4$

3) a) $m = -4$ e $n \neq \pm 5$ b) $m \neq -4$ e $n = \pm 5$

4) $a = \frac{1}{5}$ e $b = -2$

5) $a = 3$ e $b = 3$

6) c

7) $m = 4$ e $n = 14$

8) a) $\overline{z} = -4 - 5i$ c) $\overline{z} = -1 - i$

b) $\overline{z} = -10$ d) $\overline{z} = -6i$

9) a) $-7-3i$ c) 20
b) $-6+i$ d) $42+32i$

10) a) $1+i$ b) $-i+1$ 11) c 12) b

13) a) $-\frac{31}{65}-\frac{12}{65}i$ b) $2+3i$ 14) $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$

15) a) $\frac{\pi}{3}$ ou 60° b) $\frac{2\pi}{3}$ ou 120°

16) a) $2\left(\frac{5\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$ b) $1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

17) $-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

18) a) $\{1, -1, i, -i\}$ b) $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, -i\right\}$

19) a 20) a) $a \neq 0$ grau 3 / $a = 0, b \neq 0$ grau 2
b) $a \neq 2$ grau 6 / $a = 2$ e $b \neq -1$ grau 5

21) $-i+6$ 22) a) $a = 4, b = 2, c = -6, d = 4$
b) $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ e $c=\frac{2}{3}$

23) a) $Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3$
$R(x) = -6$

b) $Q(x) = x^2 + 2$
$R(x) = 3$

24) $A = 1$ $\quad B = -2$
$C = 3$

25) $a = -5$

26) a) $Q(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{7x}{8} + \frac{7}{16}$

$R(x) = -\frac{23}{16}$

b) $Q(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 15x + 45$
$R(x) = -137$

27) $p = 2$ e $q = 2$

28) b

29) $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$

30) $\{-1, i, -i, -3\}$

31) $(x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x - 2 - i) \cdot (x - 2 + i) = 0$

32) $\begin{cases} m = -1 \\ x''' = \frac{1}{3} \end{cases}$

33) Multiplicidade 2

34) $\frac{3}{4}$

35) a) 6º grau
2 tem multiplicidade 3
– 4 tem multiplicidade 2
1 é raiz simples

b) 9º grau
0 tem multiplicidade 2
–1 tem multiplicidade 4
3 tem multiplicidade 3

36) $\left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

37) $\{-1, 1, 2, -i, i\}$

38) b

39) c